

MODELO ELECTROMAGNÉTICO PARA EL ESTUDIO DE FENÓMENOS TRANSITORIOS ASOCIADOS A DESCARGAS ATMOSFÉRICAS SOBRE LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

Adrián Olivo. Luis Rosales. Juan Toledo

Dpto. de Matemáticas. Dirección de Investigación y Postgrado. UNEXPO-Puerto Ordaz-Venezuela CORPOELEC-Venezuela

ORCID: 0000-0002-8763-5513

aolivo@unexpo.edu.ve, luis.rosales2@hotmail.com, toledo.juan@gmail.com

Recibido (17/07/19), Aceptado (30/07/19)

Resumen: Este trabajo tiene como propósito presentar un modelo conformado por una metodología basada en la Electromagnética computacional y el Análisis vectorial, desarrollado con la finalidad de aportar soluciones al problema del estudio de los transitorios electromagnéticos debidos a descargas atmosféricas o rayos sobre líneas de transmisión. La metodología consiste en la aplicación en conjunto del modelo electromagnético de las ecuaciones de Maxwell-Heaviside para describir la propagación de onda electromagnética generada por el rayo, el método de diferencia finita en el dominio del tiempo (FDTD) con condiciones de fronteras absorbentes de Liao (ABC-Liao) para obtener las magnitudes de los campos eléctricos y magnéticos irradiados; como también el acople del campo electromagnético con la línea por medio del modelo del conductor delgado (TWM) para así obtener las magnitudes de las subidas de tensión y corriente que se generan. En este sentido se implementa un código computacional en MATLAB basado en dicha metodología para simular ciertos casos relacionados con impactos directos e indirectos de rayos sobre torres y líneas de transmisión. Además, se estimó a través de comparaciones hechas con el modelo híbrido electromagnético (HEM) que la herramienta computacional creada es un recurso adecuado para el análisis de transitorios en sistemas de transmisión de energía eléctrica.

Palabras Claves: Descargas atmosféricas, Ecuaciones de Maxwell-Heaviside, FDTD, ABC-Liao, Thin-Wire Model, Líneas de transmisión

ELECTROMAGNETIC MODEL FOR THE STUDY OF TRANSITIONAL PHENOMENA ASSOCIATED WITH ATMOSPHERIC DOWNLOADS ON LINES OF TRANSMISSION

Abstract: The purpose of this paper is to present a model consisting of a methodology based on Computational Electromagnetics and Vector Analysis, developed with the purpose of providing solutions to the problem of the study of electromagnetic transients due to atmospheric discharges or rays on transmission lines. The methodology consists in the joint application of the electromagnetic model of the Maxwell-Heaviside equations to describe the propagation of electromagnetic wave generated by the beam, the finite difference in time domain (FDTD) method with Liao absorbing boundary conditions. (ABC-Liao) to obtain the magnitudes of the irradiated electric and magnetic fields; as well as the coupling of the electromagnetic field with the line by means of the thin conductor model (TWM) to obtain the magnitudes of the voltage and current increases that are generated. In this sense, a computational code is implemented in MATLAB based on said methodology to simulate certain cases related to direct and indirect impacts of lightning on towers and transmission lines. In addition, it was estimated through comparisons made with the electromagnetic hybrid model (HEM) that the computational tool created is an adequate resource for the analysis of transients in electric power transmission systems.

Keywords: Atmospheric discharges, Maxwell-Heaviside equations, FDTD, ABC-Liao, Thin-Wire Model, Transmission lines.

I. INTRODUCCIÓN

Los investigadores del efecto electromagnético causado por rayos sobre líneas de transmisión coinciden que uno de los fenómenos que más afecta negativamente a los sistemas de distribución de energía son las subidas de tensión y corriente debidas a descargas atmosféricas que impactan de forma directa o indirecta sobre torres y líneas de transmisión aéreas. Este problema se ha tratado en diversos estudios que arrojan conclusiones generales como: 1. La etapa de la descarga de retorno es la que puede producir las magnitudes más altas en las subidas de tensión y corriente. 2. Se asume una distribución espacial y temporal de la corriente del rayo a lo largo del canal y 3. Se necesita plantear matemáticamente el mecanismo de acople del campo electromagnético producido por la descarga de retorno con la línea. Dentro de los estudios pioneros que destacan son los realizados por Uman, McLain y Krider [1], Agrawal, Price & Gurbaxani [2], Nucci et. al. [3] y Thottappillil & Uman [4], que arrojan resultados relacionados con el cálculo del campo electromagnético irradiado por el rayo y comparaciones entre modelos de descarga y técnicas de acople del campo electromagnético con la línea, respectivamente. Estos representan una metodología simplificada para el estudio del fenómeno y limitada al modelo transversal eléctrico (MTE) y transversal magnético (MTM) de la onda, que son características propias de modelos de ingeniería y de línea de transmisión. Por lo tanto, se propone una metodología físico-matemática de onda completa MAXWELL-FDTD-TWM desarrollada por varios investigadores de la electromagnética computacional como Yee [5], Taflove & Hagness [6], Elsherbeni & Demir [7], y otros que han aplicado esta metodología en el campo de la ingeniería como Silva [8], Noda & Yokoyama [9], Chamié Filho [10], Jiménez [11], entre otros. Con base a esto, se desarrollará un algoritmo computacional a través del cual se realizarán simulaciones relacionadas con los transitorios electromagnéticos generados por rayos sobre torres y líneas de transmisión de energía.

En consecuencia, este trabajo se divide en la forma siguiente: en la sección II: Formulación del modelo del canal de descarga del rayo, sección III: Discretización espacio-temporal de las ecuaciones de Maxwell-Heaviside, sección IV: Aplicación de ABC-Liao, sección V: Formulación TWM, VI: Flujograma para el cálculo de tensión y corriente, sección VII: Criterio de estabilidad FDTD-TWM, sección VIII: Simulaciones y Resultados, sección IX: Conclusiones y sección X: Referencias

II. FORMULACIÓN DEL MODELO DEL CANAL DE DESCARGA DEL RAYO

Dentro de los modelos existentes, sin considerar la geometría real tortuosa de una descarga atmosférica nube-tierra, se elige el modelo electromagnético, debido a que este ofrece una aproximación más real a las mediciones experimentales sobre el campo electromagnético asociado a una descarga atmosférica, Visacro [12], Herrera [13], McAfee [14] y otros. Este modelo está basado en una aproximación del canal de descarga a partir de una antena finita con pérdidas, considerando el canal recto y vertical por el cual circula la corriente de retorno I_z , como lo muestra la figura 1.

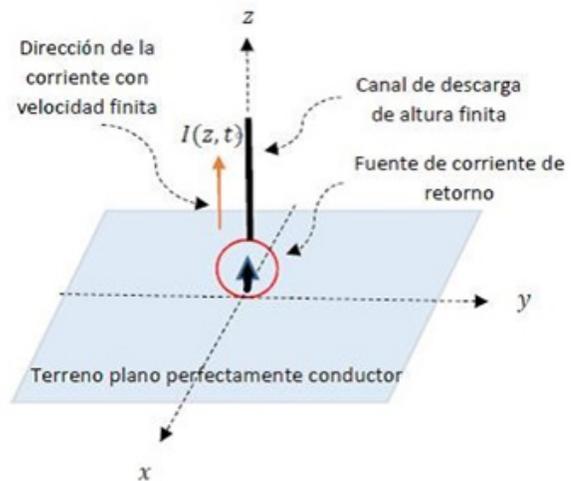


Figura 1: Modelo físico de la descarga de retorno Adaptado de McAfee (2016)

Cuando el rayo impacta en cierto lugar donde se ubica una estructura metálica, las ondas electromagnéticas se propagan en muy breves instantes de tiempo induciendo campos de fuerza eléctrica y magnética muy intensos que impregnan a toda la región espacial que envuelve la estructura, entonces se hace necesario conocer cómo se alteró la región utilizando el modelo matemático de las ecuaciones de Maxwell-Heaviside, las cuales describen la propagación de los campos en el espacio y tiempo.

Ecuaciones de Maxwell-Heaviside

Las ecuaciones de Maxwell-Heaviside en el dominio del tiempo, en un medio isotrópico y no dispersivo y con pérdidas, establecen que:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - (\sigma_m \vec{H} + \vec{M}_{fuente}) \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma_e \vec{E} + \vec{J}_{fuente} \quad (2)$$

Donde:

\vec{E} : Intensidad de campo eléctrico, [A]

\vec{H} : Intensidad de campo magnético, [A/m]

\vec{J} : Densidad de corriente eléctrica, [A/m²]

\vec{M} : Densidad de corriente magnética, [V/m²]

$\epsilon = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m: Permitividad eléctrica

$\mu = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m: Permeabilidad magnética

σ_e : Conductividad eléctrica, [S/m]

σ_m : Conductividad magnética, [Ω /m]

En las ecuaciones (1) y (2) se expanden los rotacionales de los campos eléctricos y magnéticos, e igualando respectivamente cada componente vectorial se obtiene un sistema de 3 ecuaciones diferenciales parciales (EDP) escalares para el campo eléctrico y otras 3 para el campo magnético respectivamente.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \sigma_m \vec{H} - \vec{M}_f$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} - \sigma_m H_x - \vec{M}_x^f \right) \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} - \sigma_m H_y - \vec{M}_y^f \right) \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - \sigma_m H_z - \vec{M}_z^f \right) \end{cases} \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma_e \vec{E} + \vec{J}_f$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma_e^x E_x - \vec{J}_x^f \right) \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma_e^y E_y - \vec{J}_y^f \right) \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma_e^z E_z - \vec{J}_z^f \right) \end{cases} \quad (4)$$

III. DISCRETIZACIÓN ESPACIO-TEMPORAL DE ECUACIONES

Los sistemas de EDP, (3) y (4) no poseen solución exacta o analítica, por lo tanto es indispensable hallar soluciones numéricas que aproximen los cálculos a resultados más realistas, esto se logra transformando el dominio continuo del sistema EDP en un dominio discreto a través de la celda de Yee.

Yee, introduce la notación para un punto o nodo espacial de una celda cúbica y una función evaluada en ese punto discreto en un instante dado.

$$(i, j, k,) = (i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z)$$

$$u(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = u_{(i,j,k)}^n$$

Luego se aproximan las derivadas parciales en el espacio y tiempo que aparecen en las ecuaciones (3) y (4) utilizando diferencias finitas centrales de segundo orden:

$$\frac{\partial u(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t)}{\partial x} \cong \frac{u_{i+\frac{1}{2}j,k}^n - u_{i-\frac{1}{2}j,k}^n}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial u(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t)}{\partial t} \cong \frac{u_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j,k}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}$$

Los campos eléctricos se calculan en posiciones enteras del espacio ($n\Delta x$), mientras que los campos magnéticos en posiciones intermedias ($n\Delta x/2$). Adicionalmente el campo magnético se calcula en instantes medios de tiempo $\frac{1}{2}\Delta t, \frac{3}{2}\Delta t, \dots, (n+\frac{1}{2})\Delta t$ mientras que el campo eléctrico lo hace en instantes enteros $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, n\Delta t$.

El algoritmo de Yee a través del método FDTD divide una región del espacio en una grilla espacial, llamada celda de Yee, en la cual los campos eléctrico y magnético se ubican en posiciones discretas, como lo ilustra la figura 2.

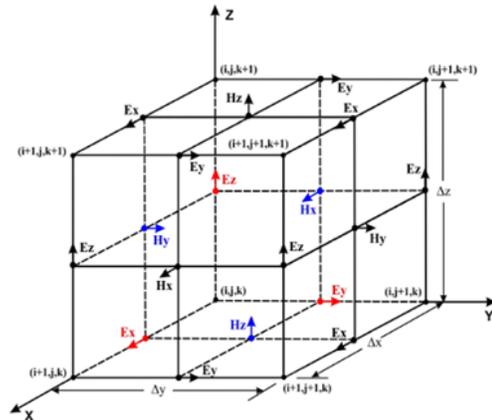


Figura 2: Celda de Yee en coordenadas rectangulares

Partiendo del conjunto de ecuaciones (3), se hace $\vec{M}_f=0$ y $\sigma_m=0$, debido a que la onda electromagnética generada por el rayo se propaga en el espacio libre. Aplicando diferencias finitas centrales en los puntos de la cara de la celda de Yee correspondiente, se obtiene la discretización en diferencias de la componentes del campo magnético y se despeja los términos: $H_x^{n+\frac{1}{2}}, H_y^{n+\frac{1}{2}}, H_z^{n+\frac{1}{2}}$ que permiten calcular el avance del campo magnético en el espacio y el tiempo.

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right)$$

$$\begin{aligned}
 H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right) &= H_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right) \\
 &+ C_h \left[\frac{E_y^n(i, j+\frac{1}{2}, k+1) - E_y^n(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta z} \right. \\
 &\left. - \frac{E_z^n(i, j+1, k+\frac{1}{2}) - E_z^n(i, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta y} \right]
 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H_y}{\partial t} &= \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \\
 H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}\right) &= H_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}\right) \\
 &+ C_h \left[\frac{E_z^n(i+1, j, k+\frac{1}{2}) - E_z^n(i, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta x} \right. \\
 &\left. - \frac{E_x^n(i+\frac{1}{2}, j, k+1) - E_x^n(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta z} \right]
 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H_z}{\partial t} &= \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \\
 H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k\right) &= H_z^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k\right) \\
 &+ C_h \left[\frac{E_x^n(i+\frac{1}{2}, j+1, k) - E_x^n(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta y} \right. \\
 &\left. - \frac{E_y^n(i+1, j+\frac{1}{2}, k) - E_y^n(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} \right]
 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{Con: } C_h = \frac{\Delta t}{\mu}$$

Considerando el conjunto de ecuaciones (4), aplicando diferencias finitas centrales en los puntos de la cara de la celda de Yee correspondiente, se obtiene la discretización en diferencia finita de la componentes del campo eléctrico y se despejan los términos: $E_x^{n+1}, E_y^{n+1}, E_z^{n+1}$ respectivamente.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E_x}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma_e E_x - \vec{j}_x^f \right) \\
 \text{Con: } \sigma_e E_x &= \sigma_e \left(i+\frac{1}{2}, j, k \right) \left(\frac{E_x^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j, k) + E_x^n(i+\frac{1}{2}, j, k)}{2} \right) \\
 E_x^{n+1}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) &= C_{ee} E_x^n\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) + C_e \vec{j}_x^f \\
 &+ C_e \left[\frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k\right) - H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k\right)}{\Delta y} \right. \\
 &\left. - \frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}\right) - H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2}\right)}{\Delta z} \right]
 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E_y}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma_e E_y - \vec{j}_y^f \right) \\
 \sigma_e E_y &= \sigma_e \left(i, j+\frac{1}{2}, k \right) \left(\frac{E_y^{n+1}(i, j+\frac{1}{2}, k) + E_y^n(i, j+\frac{1}{2}, k)}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_y^{n+1}\left(i, j+\frac{1}{2}, k\right) &= C_{ee} E_y^n\left(i, j+\frac{1}{2}, k\right) + C_e \vec{j}_y^f \\
 &+ C_e \left[\frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right) - H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}\right)}{\Delta z} \right. \\
 &\left. - \frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k\right) - H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k\right)}{\Delta x} \right]
 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma_e E_z - \vec{j}_z^f \right) \\
 \text{Con: } \sigma_e E_z &= \sigma_e \left(i, j, k+\frac{1}{2} \right) \left(\frac{E_z^{n+1}(i, j, k+\frac{1}{2}) + E_z^n(i, j, k+\frac{1}{2})}{2} \right) \\
 E_z^{n+1}\left(i, j, k+\frac{1}{2}\right) &= C_{ee} E_z^n\left(i, j, k+\frac{1}{2}\right) + C_e \vec{j}_z^f \\
 &+ C_e \left[\frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}\right) - H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}\right)}{\Delta x} \right. \\
 &\left. - \frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right) - H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right)}{\Delta y} \right]
 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{Con: } C_{ee} = \frac{2\varepsilon - \sigma_e \Delta t}{2\varepsilon + \sigma_e \Delta t} \quad C_e = \frac{2\Delta t}{2\varepsilon + \sigma_e \Delta t}$$

IV. APLICACIÓN DE CONDICIONES DE FRONTERA ABSORBENTES DE LIAO

El método FDTD proporciona soluciones en un dominio de simulación ilimitado, para limitar la región de simulación se hace necesario introducir condiciones de fronteras absorbentes (ABC) que acotan la región, además de evitar reflexiones espurias de las ondas que contaminen el cálculo de los campos.

Según Taflov y Hagness el fin de aplicar una ABC, consiste en envolver el contorno del dominio del problema con un medio sin reflexiones, de tal manera que se busca:

$$\vec{U}_{\text{incidente}} = \vec{U}_{\text{transmitido}} \quad \vec{U}_{\text{reflejado}} = 0$$

Para ello, se aplica la ABC-Liao, ya que se ha demostrado que es la que mejor resultados aporta a un menor costo computacional. Dado un punto en la frontera (NDX, t) del dominio. Liao propone conocer el valor del campo desconocido en la frontera u(NDX+1, t+1) del dominio de simulación, a través de valores anterior

res del mismo, como lo ilustra la figura 3, con la ecuación:

$$\begin{aligned}
 u(NDX + 1, t + 1) &= A_0 u(NDX, t) + A_1 u(NDX - 1, t - 1) \\
 &+ A_2 u(NDX - 2, t - 2) + \dots \\
 &+ A_n u(NDX - n, t - n) u(NDX + 1, t + 1) \\
 &= A_0 u(NDX, t) + A_1 u(NDX - 1, t - 1) \\
 &+ A_2 u(NDX - 2, t - 2) + \dots \\
 &+ A_n u(NDX - n, t - n)
 \end{aligned}$$

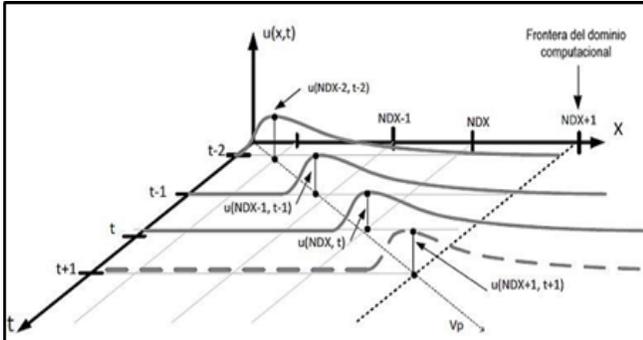


Figura 3. Onda unidimensional $u(x,t)$ propagandose a una velocidad constante V_p . (Adaptada de Jiménez, 2014)

Utilizando la expresión anterior y aplicando la fórmula del coeficiente binomial de Newton para determinar los coeficientes $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ se obtiene:

$$u(NDX+1, t+1) = 2u(NDX, t) - u(NDX-1, t-1)$$

(ABC-Liao de segundo orden)

V. Formulación del Modelo del Conductor Delgado (TWM)

El modelo de conductor delgado consiste en el cálculo tanto de los campos electromagnéticos como de corrientes y tensiones por medio de un método numérico como el FDTD. En este sentido, un conductor delgado es definido como un hilo cuyo radio es menor que el tamaño de la celda de simulación modelada. En este método, los campos eléctricos a lo largo de la línea son llevados a cero y los parámetros de permitividad (ϵ) y permeabilidad (μ) alrededor del conductor, se van actualizando de manera diferente que el resto del espacio de simulación, como se ilustra en la figura 4.

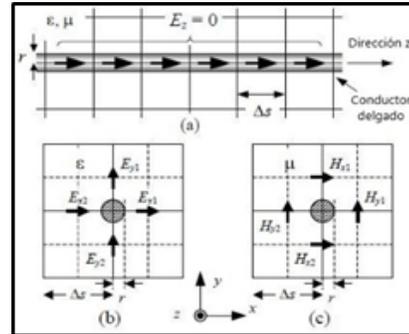


Figura 4: Configuración de conductores a través de TWM

Se introduce para ello, un radio intrínseco r_0 , para el cual la distribución del campo eléctrico y magnético alrededor del conductor de radio r_0 es igual a la de un conductor real de radio r a través de la capacitancia de estos, obteniéndose cierta constante m que es el factor utilizado para actualizar los valores de los campos eléctricos y magnéticos mediante los nuevos parámetros eléctricos del conductor, como lo muestra la figura 5.

$$C_{r_0} = \frac{2\pi m \epsilon}{\ln(\frac{\Delta s}{r_0})} \quad C_r = \frac{2\pi \epsilon}{\ln(\frac{\Delta s}{r})} \quad \frac{2\pi \epsilon}{\ln(\frac{\Delta s}{r})} = \frac{2\pi m \epsilon}{\ln(\frac{\Delta s}{r_0})} \quad m = \frac{1.471}{\ln(\frac{\Delta s}{r})}$$

$$\epsilon_m = \epsilon \frac{\ln(\frac{1}{0.23})}{\ln(\frac{\Delta s}{r_0})} \quad \mu_m = \mu \frac{\ln(\frac{\Delta s}{r_0})}{\ln(\frac{1}{0.23})} \quad \sigma_m = \sigma \frac{\ln(\frac{1}{0.23})}{\ln(\frac{\Delta s}{r_0})}$$

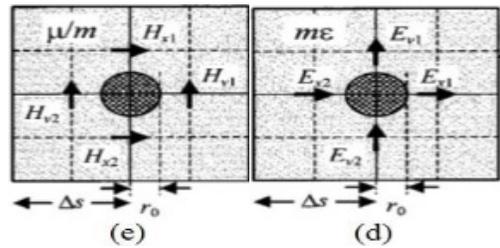


Figura 5: Reconfiguración del campo electromagnético en torno al conductor delgado

Ecuaciones del Modelo del Conductor Delgado

Al emplear el teorema de Stokes en electromagnetismo se obtienen la Ley de Faraday y Amper en su forma integral:

$$\int_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_s \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (\text{Teorema de Stokes})$$

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \iint_s \vec{H} \cdot d\vec{s} \quad (\text{Ley de Faraday})$$

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \iint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} + \iint_s \sigma \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (\text{Ley de Ampère})$$

Al aplicar la ley de Faraday sobre el contorno que encierra el área adyacente al conductor delgado, cuyo centro coincide con la circunvalación de una espira amperiana de las componentes del campo magnético, como lo señala la figura 6.

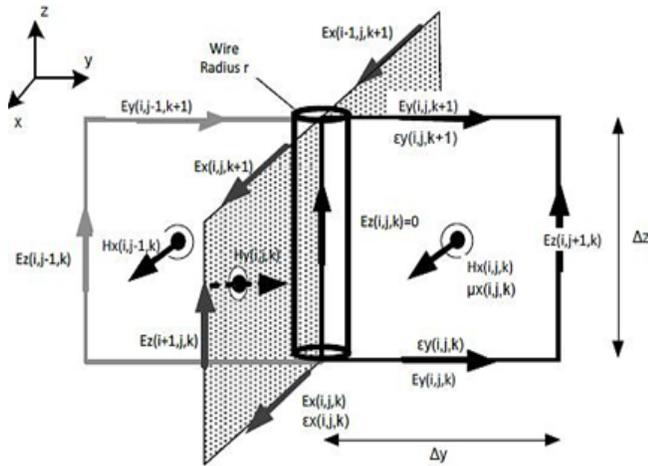


Figura 6: Configuración del conductor delgado para la ley de Faraday
(Adaptada de Jiménez, 2014)

Se obtienen las componentes del campo magnético en función de los nuevos parámetros eléctricos actualizados:

$$Hx_{(i,j,k)}^{n+\frac{1}{2}} = Hx_{(i,j,k)}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\mu \Delta z} [Ey_{(i,j,k)}^n - Ey_{(i,j,k+1)}^n] + \frac{2\Delta t}{\mu \Delta y \ln(\frac{\Delta y}{r_0})} Ez_{(i,j+1,k)}^n$$

$$Hy_{(i,j,k)}^{n+\frac{1}{2}} = Hy_{(i,j,k)}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\mu \Delta z} [Ex_{(i,j,k)}^n - Ex_{(i,j,k+1)}^n] + \frac{2\Delta t}{\mu \Delta x \ln(\frac{\Delta x}{r_0})} Ez_{(i+1,j,k)}^n$$

Cálculo de Tensión y Corriente en el Sistema

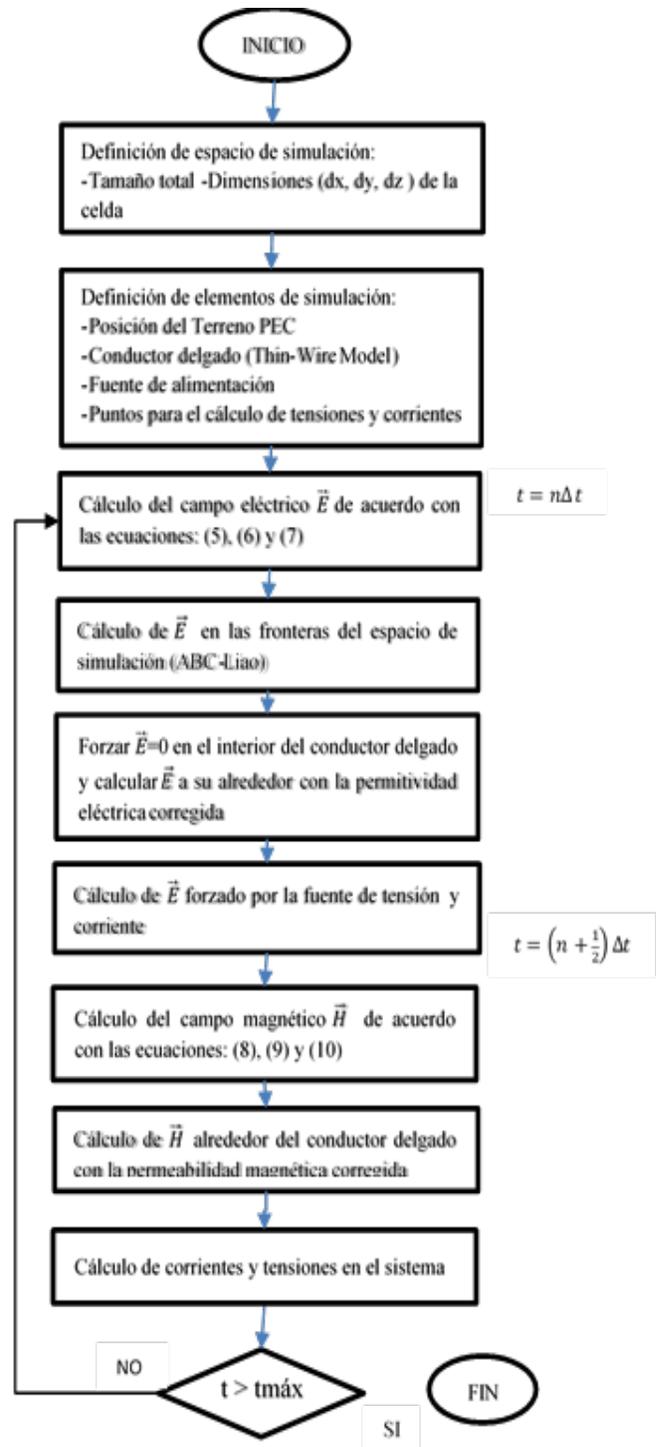
El cálculo de tensión y corriente en una determinada región de simulación requiere de la integración de los campos eléctricos y magnéticos en los puntos de interés. En un espacio discretizado, las integraciones son sustituidas por sumatorias conforme a las siguientes ecuaciones, según el sentido de integración.

$$V = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \rightarrow V = -\Delta s \cdot \sum_a^b \vec{E}$$

$$I = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} \rightarrow I = \Delta s \cdot [Hy_1 + Hx_1 - Hy_2 + Hx_2]$$

El cálculo de tensión y corriente se realiza a través de una línea de transmisión virtual acoplada mediante la técnica FDTD-TWM

VI.FLUJOGRAMA DEL ALGORITMO FDTD-TWM



VII.CRITERIO DE ESTABILIDAD

Para tener resultados significativos (precisos y estables), la dimensión de la celda deberá ser una fracción de la longitud de onda λ . Se recomienda en general un mallado con un paso menor a $\frac{\lambda}{10}$. Para asegurar la estabilidad del algoritmo, Δt se obtiene aplicando el criterio de Courant-Friedrichs-Levy (CFL), que establece la condición: $\frac{c \Delta t}{l} < 1$. Siendo:

- C : La velocidad de la onda en el medio.
- L : Longitud de la celda.
- Δt : Intervalo de tiempo.

El criterio de estabilidad CFL generalizado para tres dimensiones es:

$$\Delta t \leq C_f * \frac{1}{c \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}}$$

El factor C_f , llamado factor Courant, se utiliza para mantener razonable la cuantización del error.

VIII.SIMULACIONES Y RESULTADOS

Caso1: Conductor horizontal (Línea aérea)

De Noda y Yokoyama (2002), en la figura se observa un conductor de radio 1.5 cm y longitud 4 m sobre una placa de cobre de 10 cm de grosor, a una altura de 50 cm. El conductor horizontal es alimentado por un generador de pulsos con una resistencia interna de 50 Ω , que es conectado con el conductor horizontal mediante un conductor vertical de radio 10 mm, como lo muestra la figura 7.

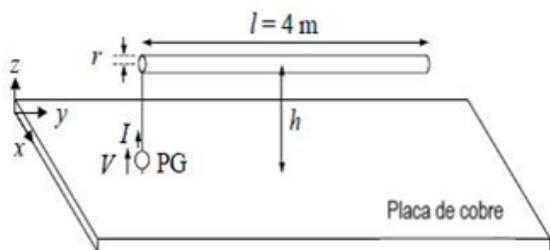


Figura 7: Arreglo de conductor horizontal (Adaptado de Noda y Yokoyama, 2002)

Parámetros de simulación

Espacio de simulación	2m x 6m x 2m
Tiempo de simulación	Tensión en el conductor: $t \cong 65$ s Corriente en la fuente: $t \cong 67$ s
Tamaño de celda	$\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta s = 0.05m$
Onda de tensión aplicada al sistema	Función de tensión: $v_s(t) = \begin{cases} \frac{v_p}{\tau_f} t + b; & \text{si } 0 \leq t \leq \tau_f \\ v_p; & \text{si } t > \tau_f \end{cases}$ Amplitud: $V_p = 60$ V $b = V_p - V_p \left[\frac{\tau_f + \tau_i}{\tau_f} \right]$ Tiempo de frente: $\tau_f = 10 \times 10^{-9}$ s Tiempo de inicio: $\tau_i = 1 \times 10^{-9}$ s Resistencia de Fuente: $R_s = 50$ Ω
ABC aplicada	Frontera de Liao de segundo orden

A continuación en las figuras 8, 9, 10, 11, 12 y 13 se muestran los resultados de las simulaciones realizadas sobre el experimento

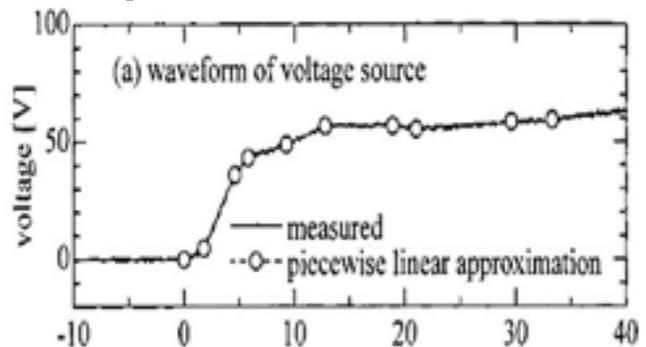


Figura 8. Pulso de tensión de entrada medido por Noda y Yokoyama (2002)

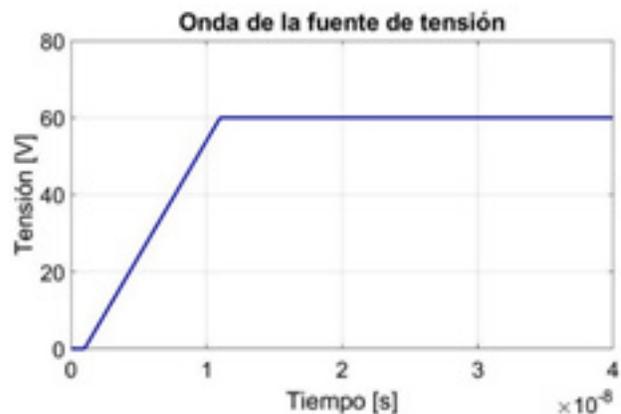


Figura 9. Tensión aproximada al pulso experimental obtenida por el autor.

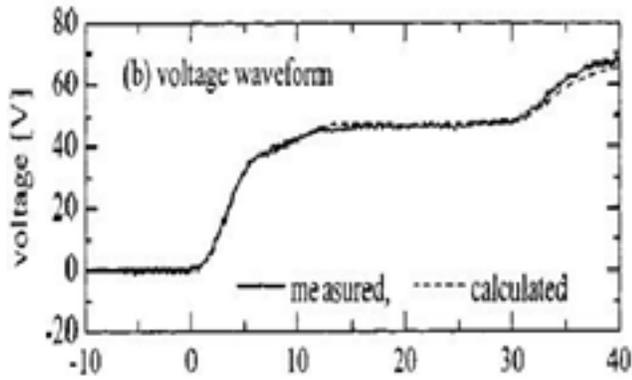


Figura 10. Tensión al final de la línea medida por Noda y Yokoyama (2002)

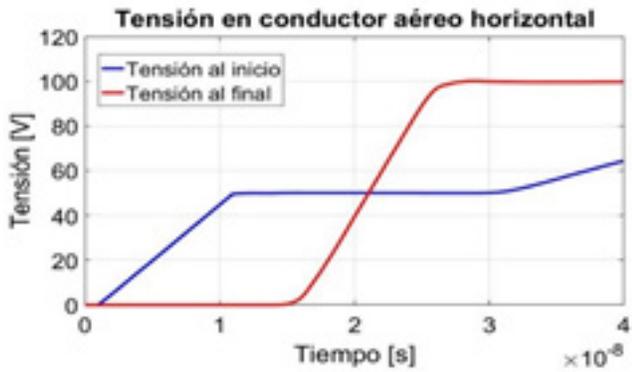


Figura 11. Tensión al inicio y final de la línea obtenida por el autor

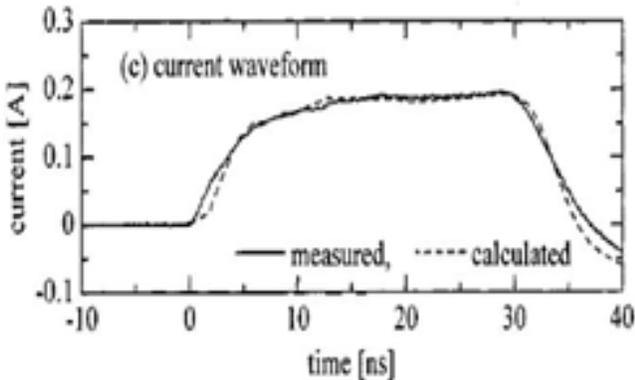


Figura 12. Corriente en la línea medida por Noda y Yokoyama (2002)

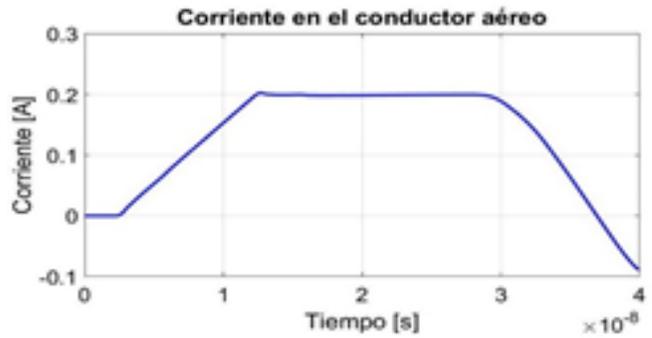


Figura 13. Corriente en la línea obtenida por el autor

Estabilidad e Inestabilidad Numérica en FDTD-TWM

Aplicando la condición CFL al resultado anterior, para un factor courant: $C_f = 1,00025$ la solución comienza a divergir para un $\Delta t \geq 35$ ns, de tal manera que cumple con tal criterio lo que evidencia el buen desempeño del algoritmo implementado en FDTD, como lo señala la figura 14.

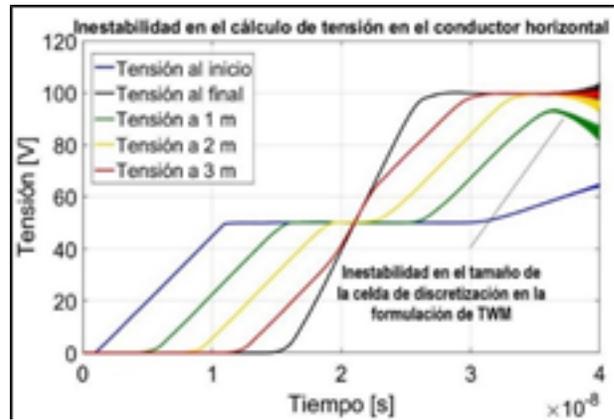


Figura 14: Inestabilidad en el cálculo a través de FDTD-TWM

Caso II: Torre y Líneas de Transmisión

Modelo de torre de transmisión sugerido por Silva (2017) extraído de Thang et. al. (2015). En el sistema se considera tres torres de 36 m separadas 25 m. Las tres fases son de radio $r=4$ mm, posicionadas a una distancia de 3 m de las torres a una altura de 34.5 m, 31.5 m y 28.5 m, como lo señala la figura 15.

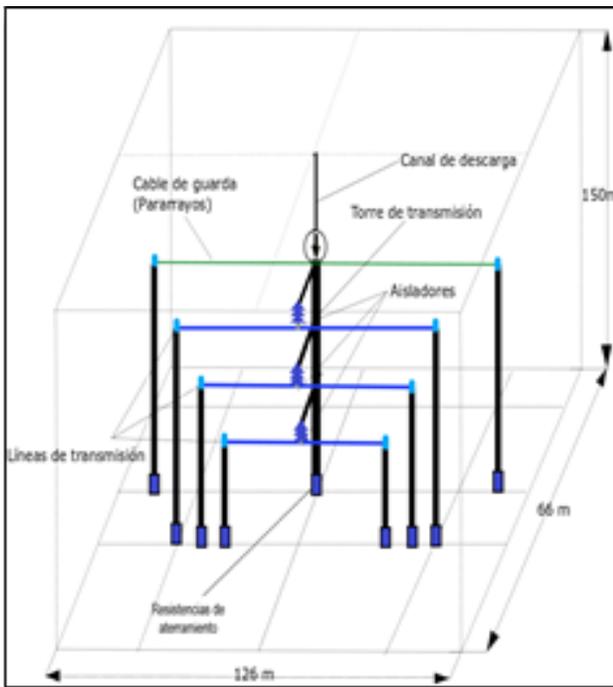


Figura 15: Sistema de torres adyacentes

Parámetros de la simulación

Espacio de simulación	66m x 126m x 150m
Tamaño de celda	
Tiempo de simulación	$\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta s = 1\text{ m}$
	Corriente en el sistema: 22 min
	Tensión en aislador: 54,55 min
	Tensión en línea de fase: 22 min
	Tensión en torre: 56,7 min
Corriente de descarga inyectada al sistema	Función corriente de retorno: Doble rampa $i_z(t) = \begin{cases} \frac{I_p}{\tau_f} t; & \text{si } 0 \leq t \leq \tau_f \\ I_p \left[1 - \frac{(t - \tau_f)}{2\tau_m} \right]; & \text{si } t > \tau_f \end{cases}$ Amplitud: $I_p = 1000\text{ A}$ Tiempo de frente: $\tau_f = 1\mu\text{s}$ Tiempo medio: $\tau_m = 50\mu\text{s}$ Resistencia de Fuente: $R_s = 1 \times 10^{12}\Omega$
Resistencias de aterramiento	De torre = 20Ω De conductor de fase = 530Ω De pararrayos = 543,37 Ω
ABC aplicada	Frontera de Liao de segundo orden

En las figuras 16, 17, 18, 19, 20 y 21 se muestran los resultados de las simulaciones realizadas sobre el caso. Se presentan unas comparaciones entre FDTD y el Modelo Híbrido Electromagnético (HEM) de Visacro y Soares [10], considerado más realista, debido a que utiliza técnicas analíticas considerando la tortuosidad del canal del rayo.

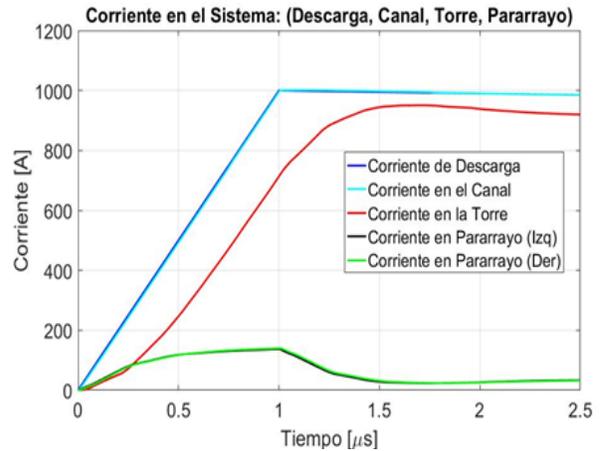


Figura 16: Corriente en el sistema: Descarga, Canal, Torre y Pararrayos

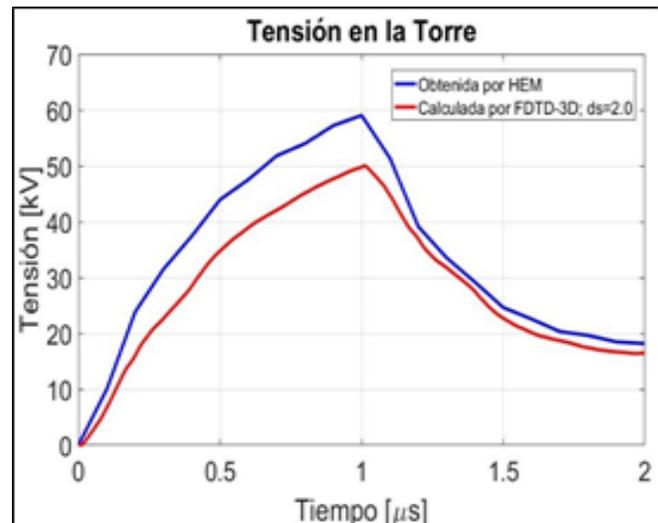


Figura 17: Tensión en la torre central a Δs=2m

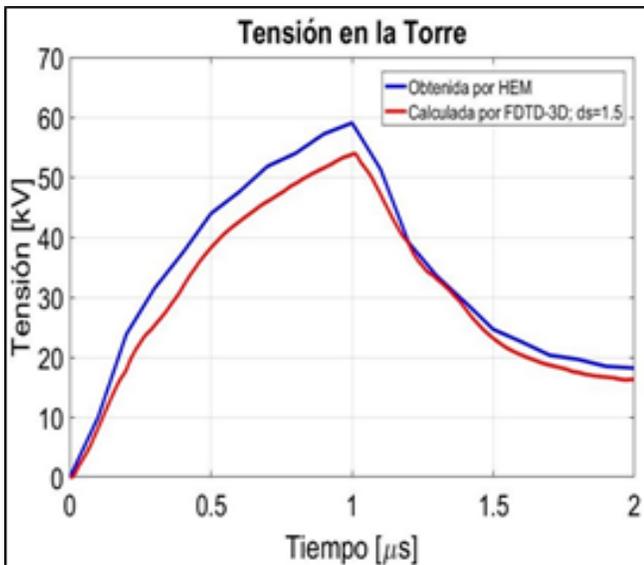


Figura 18: Tensión en la torre central a $\Delta s=1.5m$

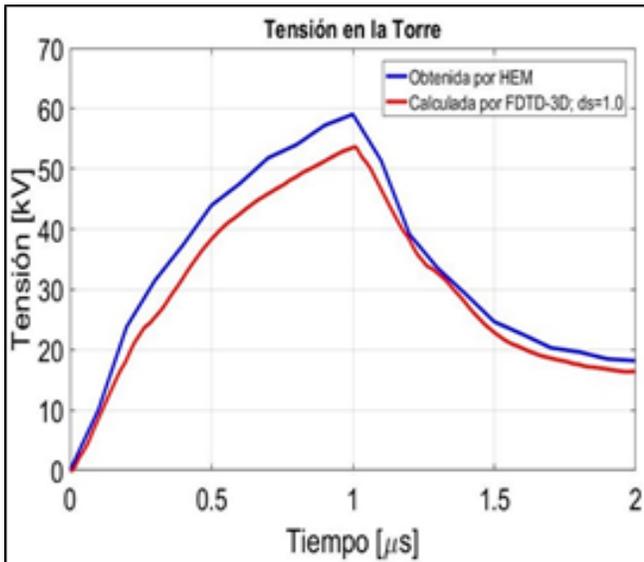


Figura 19: Tensión en la torre central a $\Delta s=1m$

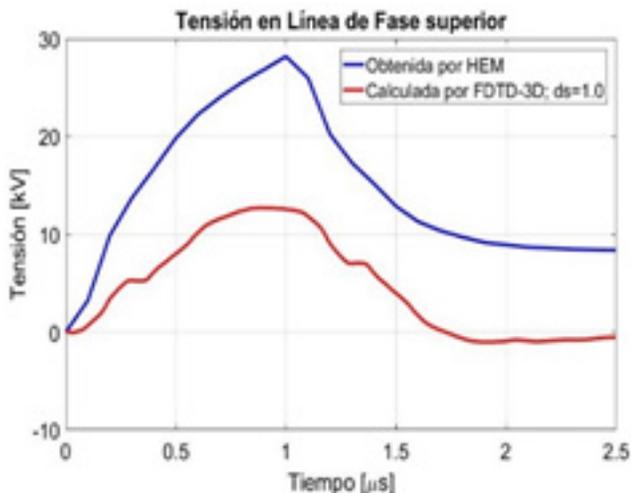


Figura 20: Tensión en línea de fase a $\Delta s=1m$

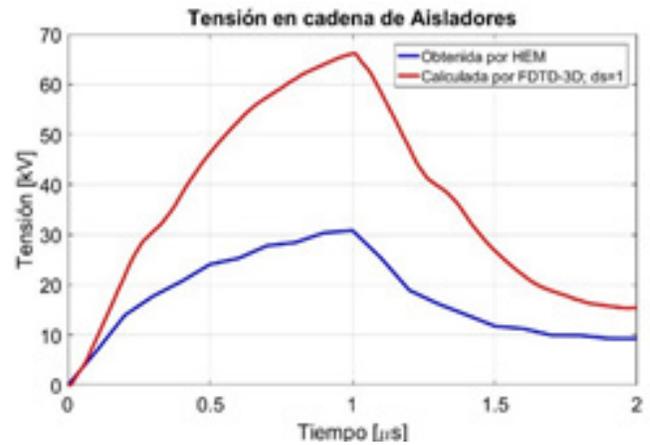
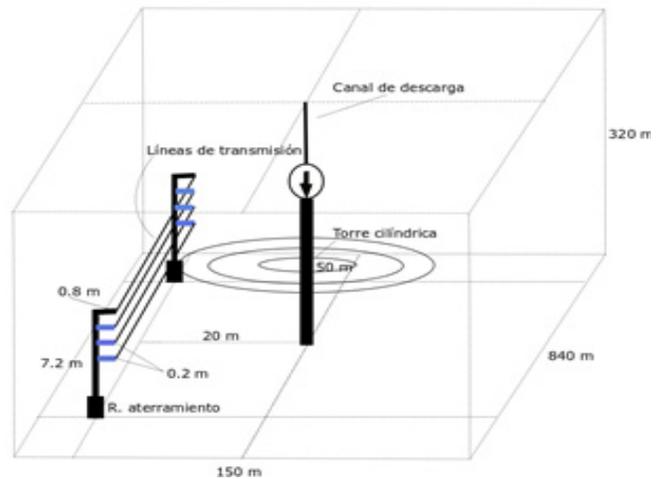


Figura 21: Tensión en aislador a $\Delta s=1m$

Caso III: Tensiones inducidas en líneas de transmisión

Se estudia un modelo de tensión inducida sobre una línea de transmisión urbana presentado por Chamié Filho et. al. (2009), estos sugieren la metodología definida por FDTD, ABC-UPML, Thin-Wire Model y procesos de computación paralela.



Parámetros de la simulación

Espacio de simulación	840m x 150m x 320m
Tamaño de celda uniforme	$\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta s = 2m$
Tiempo de simulación	1 hora
Corriente de descarga inyectada a la torre cilíndrica	<p>Función corriente de retorno:</p> <p>Doble rampa</p> $i_z(t) = \begin{cases} \frac{I_p}{\tau_f t}; & si\ 0 \leq t \leq \tau_f \\ I_p \left[1 - \frac{(t - \tau_f)}{2\tau_m} \right]; & si\ t > \tau_f \end{cases}$ <p>Amplitud: $I_p = 1000\ A$ Tiempo: $\tau_f = 1\mu s$ y $\tau_m = 50\mu s$</p>
Resistencias	De Fuente: $R_s = 1 \times 10^{12}\ \Omega$ De línea neutro = $80\ \Omega$
ABC aplicada	Frontera de Liao de segundo orden

En las figuras 22 y 23 se muestra el resultado de la simulación sobre el caso en estudio

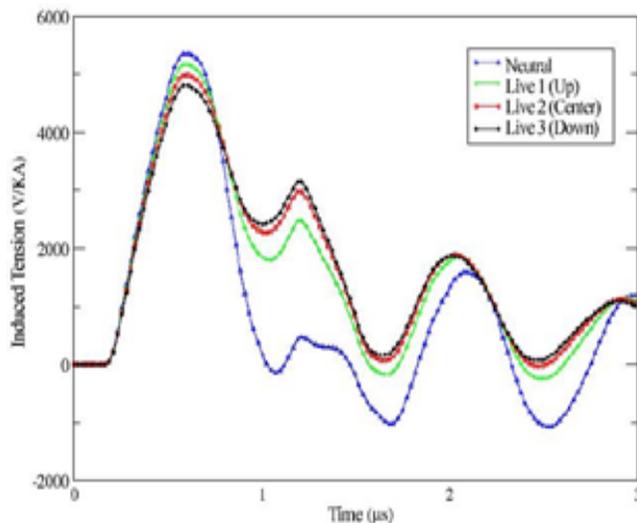


Figura 22. Tensiones inducidas por torre cilíndrica sobre líneas de transmisión urbanas obtenida por

Chamié Filho et. al. (2009)

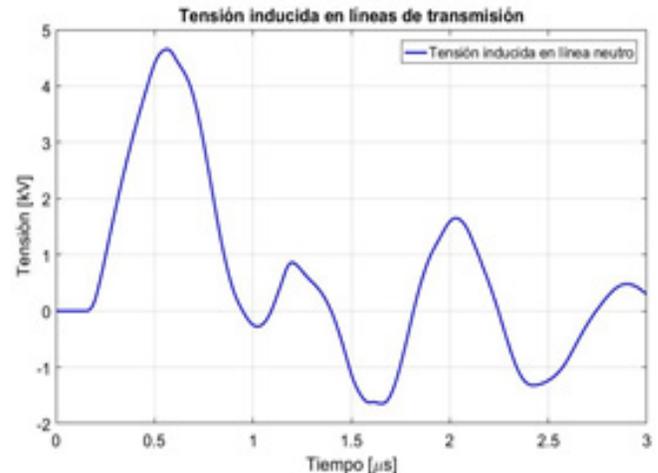


Figura 23. Tensión inducida por torre cilíndrica sobre línea neutro, obtenida por el autor

La figura anterior señala la tensión inducida sobre la línea neutro, que en comparación con los resultados dados por Chamié Filho et. al. (2009) son muy próximos a estos, lo cual evidencia que también esta metodología es aplicable para el caso de tensiones inducidas.

Nota: Todas las simulaciones fueron realizadas con el software MATLAB (2016) en un PC con procesador AMD APU-A10 3.5 GHz 4 núcleos, 8GB de RAM en Windows 10 64 bit.

CONCLUSIONES

La metodología empleada en conjunto por FDTD, ABC-Liao y Thin-Wire Model, resultó eficiente para el estudio de subidas de tensión y corrientes asociadas a descargas atmosféricas sobre líneas de transmisión; pero a un costo computacional considerable en memoria RAM para simulaciones de dominios volumétricos computacionales muy grandes. Las comparaciones y validaciones hechas con resultados presentes en artículos como los dados por Noda y Yokoyama [9], Chamié Filho et. al. [10], Jiménez [11] y Silva [8], fueron útiles para la validación del código desarrollado en MATLAB, dejando una clara aplicabilidad de la herramienta para el cálculo de sobretensiones de origen atmosférico. Así mismo, el estudio de convergencia entre FDTD y HEM mostró en términos generales buena concordancia, sobre todo en la forma de la onda y las magnitudes obtenidas en el tiempo de subida y bajada de la misma; pero no así en los valores máximos alcanzados para un tiempo de frente de $1\mu s$ donde ocurrieron las divergencias más notables, debido a que no se pudo refinar a un tamaño menor de $1m$ la longitud de la celda; ya que

requeriría más recursos en memoria de sistema no disponibles. Por otra parte, la ventaja práctica de utilizar esta metodología, radica en que cualquier interesado en el tema puede analizar problemas de transitorios electromagnéticos en un PC de medianos recursos, desde su hogar, sin la necesidad de utilizar grandes laboratorios de electromagnética computacional ubicados en centros universitarios o empresas.

REFERENCIAS

- [1] Uman, M., McLain, D. and Krider, P. The Electromagnetic Radiation from a finite antenna, *AJP*, vol. 43, 1975. 1975.
- [2] Agrawal, A. K., Price, H. J., & Gurbaxani, S. H. Transient response of multiconductor transmission lines excited by a non uniform electromagnetic field. *IEEE Transactions on electromagnetic compatibility*, (2), 119-129. 1980.
- [3] Nucci, C. A., Rachidi, F., Ianoz, M., & Mazzetti, C. Comparison of two coupling models for lightning-induced overvoltage calculations. *IEEE Transactions on power delivery*, 10(1), 330-339. 1995.
- [4] Thottappillil, R., & Uman, M. A. Comparison of lightning return stroke models. *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*, 98(D12), 22903-22914. 1993.
- [5] Yee K. S. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-14, no. 3, pp. 302-307, May 1966. 1966.
- [6] Taflov A. and Hagness S. *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*, Boston-London: 2005.
- [7] Elsherbeni, A. Z., & Demir, V. *The finite-difference time-domain method for electromagnetics with MATLAB simulations*. The Institution of Engineering and Technology. 2016.
- [8] Silva, V. A. *Aplicação do método FDTD para avaliação da resposta de linhas de transmissão e aterramentos elétricos frente a descargas atmosféricas*. (Dissertação de Mestrado, Universidade federal de minas gerais). Belo Horizonte, Brasil. 2017.
- [9] Noda, T., & Yokoyama, S. Thin wire representation in finite difference time domain surge simulation. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 17(3), 840-847. 2002.
- [10] Chamié Filho, R. H. T. *Análise de tensões induzidas em linhas de distribuição de baixa tensão frente a uma descarga atmosférica*. 2009.
- [11] Jiménez Mejía, R. E. *Lightning Induced Voltages on Overhead Lines above Non-Uniform and Non-Homogeneous Ground*(Doctoral dissertation, Universidad Nacional de Colombia-Sede Medellín). 2014.
- [12] Visacro, S., & Soares, A. HEM: A model for simulation of lightning-related engineering problems. *IEEE Transactions on power delivery*, 20(2), 1206-1208. 2005.
- [13] Herrera, J. *Nuevas aproximaciones en el cálculo de tensiones inducidas por descargas eléctricas atmosféricas*. Programa de Doctorado en Ingeniería Eléctrica, Facultad de Ingeniería, Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 128 . 2006.
- [14] McAfee, C. W. I. *Lightning return stroke electromagnetics-time domain evaluation and application* (Doctoral dissertation). 2016.
- [15] Gedney, S. D. *Introduction to the finite-difference time-domain (FDTD) method for electromagnetics*. *Synthesis Lectures on Computational Electromagnetics*, 6(1), 1-250. 2011.
- [16] Taniguchi, Y., Baba, Y., Nagaoka, N., & Ametani, A. An improved thin wire representation for FDTD computations. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 56(10), 3248-3252. 2008.
- [17] Soto, E. *Cálculo de campo electromagnético producido por rayo para terreno no plano y su efecto en las tensiones inducidas en líneas de distribución*. (Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia). Manizales, Colombia. 2010.
- [18] Sullivan, D. M.. *Electromagnetic simulation using the FDTD method*. John Wiley & Sons. 2013