

SIMULACIÓN DE LA TEMPERATURA EN PIES DIABÉTICOS

Sucre Samuel Cando Pacheco¹, Alexander Romario Caicedo Alcívar², Lucas Stalin Caicedo Franco², César Abraham Saavedra Drouet², Sandy Brigitte Sánchez Valencia²

¹Universidad de Guayaquil, ²Universidad Técnica Luis Vargas Torres

sucre.candop@ug.edu.ec, {romario20030, lcaicedo7, cesarsaa1991, Sandy.sanchez.valencia}@gmail.com

Resumen: Los daños en los pacientes de pie diabético son la principal causa de amputación de las extremidades inferiores. El pie diabético es considerado un síndrome clínico que incluye factores infecciosos que producen daño tisular y determinan la evolución de la extremidad. En la evaluación del pie diabético resulta clave el reconocimiento de la úlcera y el estado vascular de la extremidad, de allí la importancia de hacer simulaciones que permitan predecir el curso clínico y posibles terapias. El objetivo principal de este trabajo es la simulación de la distribución de temperatura usando el modelo de Pennes, en un pie diabético para determinar los posibles tratamientos. Se resuelve la ecuación de transferencia de calor por varios métodos. Entre ellos, diferencias finitas, Euler implícito y explícito. Como resultado, a mayor temperatura mayor irrigación de la sangre en el pie, debido a esto es conveniente mantener una temperatura cercana a los 37°C en una persona diabética.

Palabras Clave: Pie diabético, modelo de Pennes, Diferencias finitas, Euler implícito y explícito

SIMULATION OF THE TEMPERATURE IN DIABETIC FEET

Abstract: Damages in diabetic foot patients are the main cause of amputation of the lower extremities. Diabetic foot is considered a clinical syndrome that includes infectious factors that produce tissue damage and determine the evolution of the limb. In the evaluation of the diabetic foot the recognition of the ulcer and the vascular state of the limb is key, hence the importance of making simulations that allow to predict the clinical course and possible therapies. The main objective of this work is the simulation of the temperature distribution using the Pennes model, in a diabetic foot to determine the possible treatments. The heat transfer equation is solved by several methods. Among them, finite differences, implicit and explicit Euler. As a result, the higher the temperature, the greater the irrigation of the blood in the foot, due to this it is convenient to maintain a temperature close to 37°C in a diabetic person.

Key words: Diabetic foot, Pennes model, Finite differences, implicit and explicit Euler.

I.INTRODUCCIÓN

La diabetes es una enfermedad que afecta a gran cantidad de personas a nivel mundial. Produce un aumento importante de los niveles de glucosa (azúcar) en la sangre. Esto ocurre al producirse escasez o ausencia de secreción de insulina[1,2]. La insulina, es una hormona segregada por el páncreas que ayuda a que la glucosa proveniente de los alimentos, entre en las células para suministrarles energía. Sino hay suficiente insulina la glucosa permanece en la sangre, provocando con el tiempo graves problemas de salud.

Se conoce como pie diabético a una alteración clínica de origen neuropático (afecta los nervios) e inducida por la hiperglicemia (azúcar alto), en la que con o sin coexistencia de isquemia (falta de riego sanguíneo), y previo desencadenante traumático, genera lesión y ulceración del pie. La carencia de irrigación

sanguínea en pacientes diabéticos provoca la pérdida de sensibilidad en los pies. Por esta razón una salida urgente es amputar debido a la escasa posibilidad de cicatrización, cuando ocurren daños. Se hace necesario conocer el grado de sensibilidad monitoreando la distribución de temperatura en los pies del paciente. En este trabajo se adopta el modelo de Pennes[2] para simular la dependencia de la temperatura del nivel de irrigación del pie diabético.

El pie diabético es sumamente riesgoso, ya que es susceptible de padecer determinados tipos de lesiones por trastornos de la piel. Se estima que la mitad de las amputaciones de miembros inferiores en el mundo se produce en diabéticos, siendo esta enfermedad la primera causa de amputaciones en los países desarrollados. El 15% de los pacientes con diabetes desarrollarán una úlcera a lo largo de su vida.

El constante aumento de la glucosa en sangre hace que los vasos sanguíneos que irrigan el pie se vayan estrechando de tal forma, que el aporte de oxígeno y nutrientes esenciales es insuficiente. El hecho que personas diabéticas tengan una disminución de riego sanguíneo, hace que sus lesiones tarden más en curar y que tengan un alto riesgo de complicaciones irreversibles[3,4,5]. La mala circulación (flujo sanguíneo) puede hacer que disminuya la capacidad del pie de combatir la infección y de que sane. La diabetes hace que los vasos sanguíneos del pie y la pierna se vuelvan más angostos y duros[6,7,8].

En este trabajo se simula la ecuación de transferencia de calor para determinar los niveles de temperatura en el pie diabético. Las simulaciones se realizaron por diferentes métodos para optimizar y obtener la mejor respuesta. En la sección II se muestra el desarrollo y principales aspectos de la investigación. En la sección III se detallan los principales resultados de las simulaciones. Luego, en la sección IV se muestran las conclusiones y finalmente las referencias usadas en la investigación.

II. DESARROLLO

Las úlceras y amputaciones de los pies constituyen un gran problema de salud pública que genera preocupación para el paciente, sus familiares. Por esto, una comprensión adecuada de la ulceración del pie es fundamental para lograr la reducción de la incidencia, morbilidad y mortalidad de esta patología [9] en personas con pie diabético.

La Organización Mundial de la Salud define pie diabético como la infección, ulceración y destrucción de tejidos profundos de la extremidad inferior, asociados con alteraciones neurológicas y diversos grados de enfermedad vascular periférica[10]. Actualmente es considerado como un síndrome clínico y una complicación crónica grave de la diabetes mellitus, de etiología multifactorial, que incluye la presencia de neuropatía sensitivo-motora, angiopatía, edema y afectación de la inmunidad, que originan infección, ulceración y gangrena de las extremidades inferiores ameritando hospitalización prolongada y, en algunas ocasiones, amputaciones que incapacitan parcial o definitivamente al paciente[11,12].

En este trabajo se utiliza la ecuación de transferencia de calor para estudiar la irrigación del pie diabético. En este caso, se modela el problema dependiente del tiempo de conducción del calor por difusión en ausencia de fuentes y sometido a condiciones de frontera de Newman y Dirichlet. Se plantea la solución de la ecuación mediante el método de diferencias finitas. El

método de diferencias finitas es una de varias técnicas para obtener la solución de la ecuación en derivadas parciales en general. Debido que la solución varía con el tiempo, $T(x,t)$ denota la temperatura en el punto x al tiempo t [2,16].

Se aplicarán varios esquemas en diferencias para obtener soluciones aproximadas de la ecuación de transferencia de calor unidimensional. Utilizando aproximaciones en diferencias finitas de las derivadas, a segundo orden: diferencias finitas centradas, hacia adelante, hacia atrás y los métodos implícitos y explícitos se usarán y se demostrará la convergencia de los esquemas propuestos y su estabilidad[17,18].

Modelo físico

Las uñas son capas epidérmicas en forma de lámina convexa, dura y flexible. Recubren la última falange de los dedos. Su estructura química está compuesta de queratina, calcio, agua, lípidos, y mucopolisacáridos con un máximo de 16% de agua. El modelo físico lo constituye la piel más cercana a la uña con muy poco tejido muscular.



Figura 1. El modelo físico constituye la piel adherida a la uña. Se muestra además el corte correcto de la uña para una persona diabética.

Modelo matemático

Se aplica el modelo de transferencia de Pennes [1,2]. para estudiar la dependencia de la temperatura del tejido, del nivel de irrigación sanguínea del pie diabético

$$\rho c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} - w c_b [T(x,t) - T_{art}] + Q(x) \quad (1)$$

donde ρ, c y k son: densidad, el calor específico y la conductividad térmica del tejido, respectivamente. W es la tasa de perfusión sanguínea, c_b es el calor

específico de la sangre arterial, $T(x,t)$ es la distribución de temperatura de la piel muy cercana a la uña, T_{art} es la temperatura de la sangre arterial y $Q(x)$ es la fuente de calor.

En este caso, no se consideran fuentes externas de calor. Por lo tanto, $Q(x)=0$ en la ecuación (1)

$$\rho c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} - w c_b [T(x,t) - T_{art}] \quad (2)$$

Para facilitar la implementación numérica es conveniente trabajar (2) en la forma

$$\frac{1}{k} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} - y [T(x,t) - T_{art}] \quad (3)$$

Las condiciones de frontera usadas para resolver la ecuación (3), se usarán condiciones de frontera de Dirichlet. Alternativamente, en uno o ambos extremos se especifican los valores de los gradientes normales sobre el contorno. Esta condición de frontera, la cual es una condición sobre la derivada de $T(x,t)$, es llamada una condición de frontera de Neumann.

Las derivadas se discretizan en la ecuación usando la expansión en series de Taylor truncada a segundo orden. La aproximación discreta resulta en un conjunto de ecuaciones algebraicas que son evaluadas (o solucionadas) para los valores de las incógnitas discretas. El dominio físico se discretiza por medio del mallado, esto es, dividir el dominio en subintervalos. La malla es un conjunto de puntos o nodos donde la solución discreta será computada. El parámetro clave de la malla es Δ , la distancia entre puntos adyacentes. La idea del método de diferencias finitas es reemplazar las derivadas continuas con las llamadas fórmulas de diferencias que envuelven solamente valores discretos asociados con posiciones en la malla. En el presente caso existen derivadas únicamente con respecto a la posición y el tiempo. En el límite cuando el espaciamiento de la malla tiende a cero, la solución numérica obtenida con cualquier esquema aproximará la solución a la ecuación diferencial original.

Discretizando (3) se tiene

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^2} [T(i+1, n) - 2T(i, n) + T(i-1, n)] \\ & - \frac{1}{k} [T(i, n+1) - T(i, n)] \\ & - y [T(i, n) - T_{art}] = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Despejando $T(i, n+1)$ de (4)

$$\begin{aligned} T(i, n+1) & = -\frac{1}{h^2} [(2k - h^2 + y h^2 k) T(i, n) \\ & - k T(i-1, n) - k T(i+1, n) - y h^2 k T_{art}] \end{aligned}$$

Esta ecuación se implementa numéricamente en Matlab. La temperatura es función del nivel de irrigación sanguínea y de la interacción de los flujos conductivo y convectivo de la uña adherida a la piel.

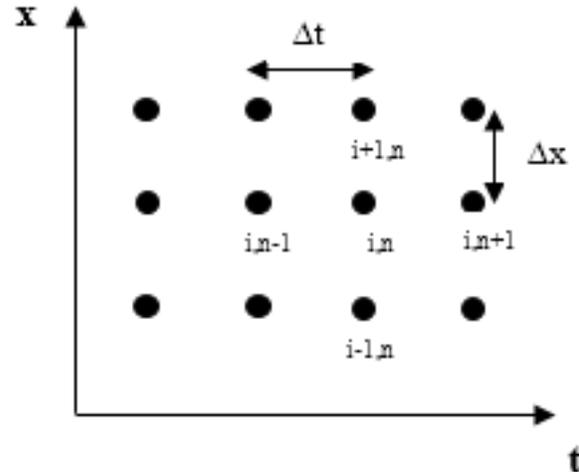


Figura 6: Discretización del espacio-tiempo utilizada en diferencias finitas. El paso de tiempo entre dos niveles consecutivos se denomina Δt , y la distancia entre dos puntos adyacentes en el espacio Δx .

Para implementar numéricamente la ecuación (5) falta especificar la condición de frontera e inicial. La temperatura de la piel muy próxima a la uña asume un valor constante. En las primeras corridas del código la condición de frontera (Dirichlet) es $T(x,t)=0$. En $t = 0$, $T(x,0)=T_0$ se asume un valor constante distinto de cero. En otras simulación se usaron derivadas de T (Newmann).

El algoritmo para hallar la solución numérica es el siguiente:

- Definir la malla o red computacional.
- Definir el tamaño de paso de tiempo entre niveles consecutivos y el elemento de longitud espacial, es decir, la distancia entre los puntos adyacentes en el espacio.
- Definir las condiciones iniciales y de contorno apropiadas al problema.
- Garantizar la estabilidad del sistema con la relación entre los espaciados Δt y Δx h. En el código $\Delta t = h$.

II.RESULTADOS

En lo que sigue se estudia a través del cálculo numérico el caso anteriormente expuesto y se interpretan los resultados obtenidos. Los códigos se implementaron en Matlab. Los parámetros usados en las corridas del código son:

Conductividad térmica (piel justo debajo de la uña):
 $k = 0.35 \text{ Jm}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$

Calor específico (piel debajo de la uña): $c = 3.30 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$

Densidad (piel) = $\rho = 1.2 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$

Calor específico ~ calor específico del agua ~ $c_b = 4.2 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$

Tasa de perfusión sanguínea: $w = 6.667 \times 10^{-6} \text{ m}^{-3} \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-1}$

La variable Tart almacena, para cada corrida, los valores 25, 30,35 y 37 °C de la temperatura arterial del cuerpo.

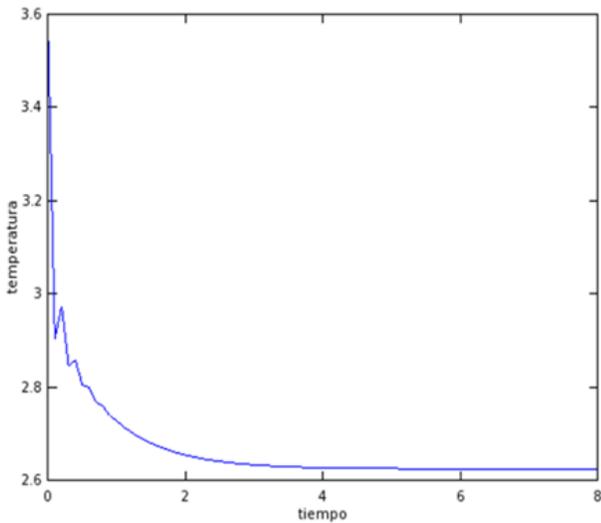


Figura 2. Se muestra la temperatura (multiplicada por 10) en función del tiempo para $T_{art}=25^\circ\text{C}$.

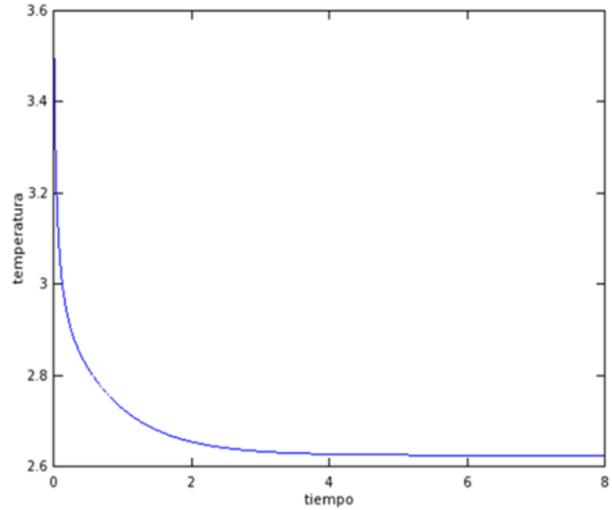


Figura 3. Se muestra la temperatura (multiplicada por 10) en función del tiempo para $T_{art}=30^\circ\text{C}$.

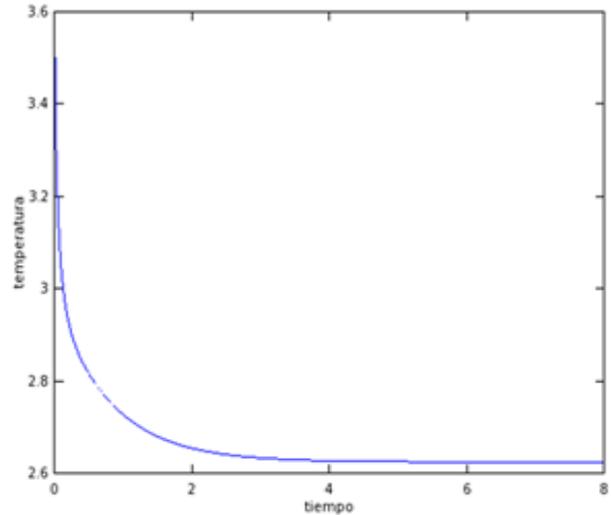


Figura 4. Se muestra la temperatura (multiplicada por 10) en función del tiempo para $T_{art}=35^\circ\text{C}$.

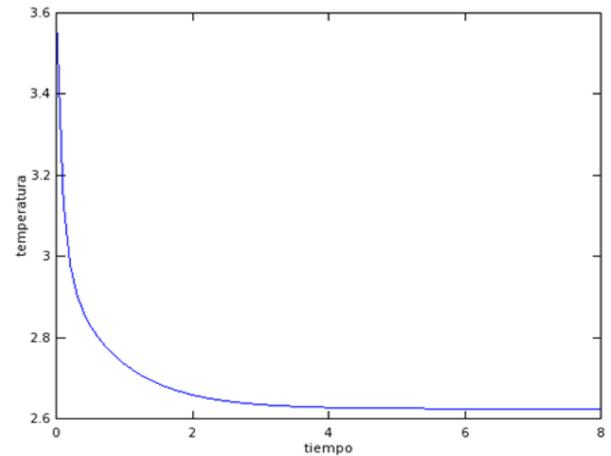


Figura 5. Se muestra la temperatura (multiplicada por 10) en función del tiempo para $T_{art}=37^\circ\text{C}$.

Los resultados obtenidos de las simulaciones se muestran en las figuras 2, 3, 4 y 5. Se observa que la temperatura apenas tarda en estabilizarse en el tiempo para $T_{art}=37^{\circ}\text{C}$ en los puntos de la piel cercanos a la uña y la irrigación sanguínea es mayor. Esto sugiere que una buena aproximación de las soluciones numéricas. Mientras más baja es la temperatura arterial tarda más en estabilizarse la temperatura, lo que implica menos irrigación de sangre. Lo ideal para una persona con pie diabético es mantenerse cercano al nivel de $T_{art}=37^{\circ}\text{C}$. Para temperaturas debajo de $T_{art}=25^{\circ}\text{C}$ el código desarrollado presenta inestabilidades. Esto ocurre también para temperaturas mayores de 40°C . Se realizaron varias simulaciones con diferentes métodos de discretización. El método explícito usado en la discretización, es una ventaja a la hora de implementarlo numéricamente, sin embargo se trata de un método bastante inestable, y para obtener soluciones lógicas se debe disminuir el tamaño del paso temporal frente al espacial. Es más fácil lograr la convergencia cuando se usa un método implícito.

Manteniendo la misma ecuación diferencial que modela el comportamiento térmico de la piel adherida a la uña, se cambiaron las condiciones de contorno: Dirichlet, Neumann y combinación de ellas. Los resultados se mantienen estables. Para calcular el error se tomó una solución analítica de la ecuación de transferencia de calor y se comparó punto a punto con la solución numérica. El error estuvo dentro del margen esperado a segundo orden de aproximación. Se graficó $\log(\text{Error})$ Vs $\log\Delta x$ se obtiene el error entre una solución analítica conocida y la solución numérica encontrada para la ecuación de transferencia de calor (2). Una pendiente aproximadamente igual a dos, implica que la solución numérica converge a la solución analítica.

También se realizó un refinamiento del mallado espacial y la solución se mantuvo en los niveles esperados. Para verificar la estabilidad de la solución numérica se evolucionó el código elaborado hasta 100 unidades de tiempo y la temperatura se mantuvo acotada, confirmando la confiabilidad de la solución para $T_{art}=37^{\circ}\text{C}$. Esto implica que los espaciados Δt y Δx fueron seleccionados correctamente. En todas las simulaciones se usó una malla cuadrada, de tal forma que $\Delta t = \Delta x = h$.

IV. CONCLUSIONES

-Se simuló a través de la ecuación de transferencia de calor, una forma de encontrar los patrones de temperatura de una persona con pie diabético. A mayor temperatura aumenta la vaso dilatación y disminuye

la velocidad de sedimentación sanguínea, esto implica mayor irrigación de la sangre. Mientras que a menor temperatura disminuye la vaso dilatación y aumenta la velocidad de sedimentación sanguínea. Por lo tanto, la irrigación es menor.

-Para aplicar los tratamientos se debe tomar en cuenta componentes que eleven la temperatura del pie.

-Las simulaciones se llevaron a cabo con diferentes esquemas de discretización en la ecuación de transferencia de calor (2). Los resultados encontrados fueron similares.

-La diabetes mellitus es una afección de gran importancia clínico-epidemiológica y su prevalencia aumenta de año en año. Se considera que en el año 2025 el número de personas afectadas con esta enfermedad en el mundo superará los 300 millones.

-Es conocido que más del 85 % de las amputaciones en miembros inferiores de las personas con diabetes responde a úlceras mal tratadas. Es por eso que una de las mayores preocupaciones de las personas con diabetes y del equipo de salud que las trata es la presencia de estas lesiones. Por eso es fundamental conocer los posibles tratamientos para mantener la distribución de temperatura del pie diabético en los niveles adecuados, de tal forma de tener una mayor irrigación de la sangre.

V. REFERENCIAS

- [1]. Yorgi Rincón, Víctor Gil, Julio Pacheco, Isabel Benítez, Miguel Sánchez, Evaluación y tratamiento del pie diabético. Revista Venezolana de Endocrinología y Metabolismo Rev. Venez. Endocrinol. Metab. vol.10 no.3 2012. ISSN 1690-3110
- [2]. L. Martino, V. carrera, G. Larrazábal y M. Cerrolaza Desarrollo y avances en métodos numéricos para ciencias e ingeniería, CIMENICS 2008, ISBN 978-980-7161-00-8.
- [3]. Bevilacqua N, Rogers L, Armstrong D. Diabetic foot surgery: classifying patients to predict complications. Diabetes Metab Res Rev 2008;24(Suppl1):S81-S83.
- [4]. Schultz G, Sibbald G, Falanga V, Ayello E, et al. Wound bed preparation: a systematic approach to wound management. Wound Rep Reg 2003;11:1-28.
- [5]. Fernández-Montequín JI, Santiesteban L. Can Heberprot-P change the surgical concepts on treating diabetic foot? Biotecnología Aplicada. 2010;27:165-70.
- [6]. Gil MR, López-Mola E, Álvarez H, Hernández A, Pérez C, Yera I, et al. Experiences in the nationwide program for the integral care of the patient with diabetic foot ulcer using Heberprot-P. Biotecnología Aplicada. 2010;27:147-50.
- [7]. Hernández Rivero I Manuel Jorge, Llanes Barrios II José Agustín, Acosta Lapera III Daysi Silvia.

- Heberprot-P, una terapia eficaz en la prevención de la amputación en el pie diabético. *Rev Cubana Angiol Cir Vasc* 2009;10:3-11.
- [8]. Capobianco C, Stapleton J, Zgonis T. Surgical Management of Diabetic Foot and Ankle Infections. *Foot Ankle Spec* 2010;3:223-230.
- [9]. Blanes J. I., Clará La., Lozano F., Alcalá D., Doiz Y., Merino R., et al. Documento de consenso sobre el tratamiento de las infecciones en el pie de él diabético. *Angiología*. 2012; 64(1): 31-59.
- [10]. Castro G., Liceaga G., Arrijoa La., Calleja J., Espejel La., Flores J., et al. Guía clínica basada en lana evidencia para el manejo de él pie diabético. *Med. Int. Mex.* 2009;25(6): 481-526.
- [11]. Marinello J., Carreño P., Estadella B. Procedimientos diagnósticos en el pie diabético. En: Marinello J., coordinador. *Tratado de pie diabético*. (1ª ed). Madrid: Jarpay Editores; 2002.p. 71-85.
- [12.] Suárez C., Lozano F. S., coordinadores; Bellmunt S., Camafort M., Díaz S., Mancera J., Carrasco Y., Lobos J. M. Guía española de consenso multidisciplinar en enfermedad arterial periférica de extremidades inferiores. 1ª ed. Madrid: Luzán 5, S.A.;
- [13.] J. C. Dumville, et al. Systematic review and mixed treatment comparison: Dressings to heal diabetic foot ulcers. *Diabetología*. 2012; (55): 1902-1910.
- [14.] Bergin S. M., Wraight P. Apósitos para heridas y agentes tópicos con plata para el tratamiento de la úlcera de él pie diabético. En: *Lana Biblioteca Cochrane Plus*, 2008 Número 4. Oxford: Update Software Ltd. Disponible en: <http://www.update-software.com>. (Traducida de The Cochrane Library, 2008 Issue 3. Chichester, UK: John Wiley & Sons, Ltd.).
- [15.] Bakker K, Riley P. El año del pie diabético. *Diabetes Voice*. 2005;50:11-4.
- [16]. Put feet first prevent amputation. Diabetes and foot care. Time to act: International Diabetes Federation and International Working Group on the Diabetic Foot (IWGDF). 2005. Disponible en URL: http://www.idf.org/webdata/docs/T2A_Introduction.pdf
- [17]. Unwin N. The diabetic foot in the developing world. *Diabetes Metab Res Rev* 2008;24(Suppl 1):S31-S33.
- [18]. Bonilla E, Planell E, Hidalgo S, Lázaro JL, Martínez L, Mosquera A, et al. Guía de Protocolos de Pie Diabético. Consejo General de Colegios Oficiales de Podólogos. 1ra. Edición. Madrid; 2011.
- [19]. Castro G, Liceaga G, Arrijoa A, Calleja JM, Espejel A, Flores J, García T, et al. Guía clínica basada en evidencia para el manejo del pie diabético. *Med Int Mex* 2009;25:481-526.
- [20]. Bruges J, Márquez G, Macedo G, Ramos F, Valero K, Calvagno M, Schinca N, Gayoso R, Jubiz Y, Rivas Y. Guías ALAD de Pie diabético 2010;VOL. XVIII(Nº2):73-86.
- [21]. Consenso Nacional de Diabetes Tipo 2. Sociedad Venezolana de Endocrinología y Metabolismo. Venezuela 2003.
- [22]. Hiatt W. Medical Treatment Arterial Disease and Claudication. *N Engl J Med* 2001;344:1608-1621.
- [23]. Beltrán C, fernández A, Giglio S, Biagini L, Morales R, Pérez J, aburto I. Tratamiento de la infección en el pie diabético. *Rev Chil Infectol* 2001;18:212-223.
- [24]. Dinh T, Snyder G, Veves A. Current techniques to detect foot infection in the diabetic patient. *Int J Low Extrem Wounds* 2010 Mar;9:24-30.
- [25]. Fleischer AE, Didky AA, Wood JB, Burn SE, Wrobel JS, Armstrong DG. Combined clinical and laboratory testing improves diagnostic accuracy for osteomyelitis in the diabetic foot. *J Foot Ankle Surg* 2009;48:39-46.
- [26]. Reiber GE, Vileikyte L, Boyko EJ, et al. Causal pathways for incident lower-extremity ulcers in patients with diabetes from two settings. *Diabetes Care* 1999;22:157-162.
- [27]. Barberán J. Diabetic foot infections: the importance of bacterial resistance. *Enferm Infecc Microbiol Clin* 2009;27:315-316.
- [28]. Scimeca C, Bharara M, Fisher T, Kimbriel H, Mills J, Armstrong D. An Update on Pharmacological Interventions for Diabetic Foot Ulcers. *Foot Ankle Spec* 2010;3:285-302.
- [29]. Aragón-Sánchez J. Treatment of Diabetic Foot Osteomyelitis: A Surgical Critique. *Int J Low Extrem Wounds* 2010;9:37-59.
- [30]. Winston A, Miller J. Treatment of Onychomycosis in Diabetic Patients. *Clinical Diabetes* 2006;24(4):160-166.
- [31]. O'Donnell M. The Vascular and Biochemical Effects of Cilostazol in Diabetic Patient With Peripheral Arterial Disease. *Vasc Endovascular Surg* 2009;43:132-143.
- [32]. Girolami B, Bernardi E, Prins MH, et al. Treatment of intermittent claudication with physical training, smoking cessation, pentoxifyline or nafronyl: a meta-analysis. *Arch Inter Med* 1999;159:337-345.
- [33]. Bril V, England J, Franklin GM, et al. Evidence-based guideline: Treatment of painful diabetic neuropathy. *Neurology* 2011;76:1758-1765.
- [34]. Standards of Medical Care in Diabetes 2012. *Diabetes Care* 2012;35:S11-S63.