

# METODOLOGÍA BASADA EN ALGORITMOS GENÉTICOS Y OPTIMIZACIÓN POR ENJAMBRE DE PARTÍCULAS PARA DEFINIR LAS MATRICES DE PESO DEL REGULADOR LINEAL CUADRÁTICO

Lorbes, María<sup>1</sup>.

mariabelenlorbes@gmail.com

Apartado 526. Maracaibo 4001-A, Estado Zulia, Venezuela.

La Universidad del Zulia. Facultad de Ingeniería. Escuela de Ingeniería Eléctrica

Recibido (12/01/20), Aceptado (30/01/20)

**Resumen:** El llamado problema de regulación lineal cuadrático es una estrategia de control moderna que por medio de la configuración de las matrices de peso Q y R, se encarga de la tediosa labor realizada por el especialista en la optimización del controlador; encontrando los parámetros de control que reduzcan al mínimo las desviaciones no deseadas. Sin embargo, no existen métodos analíticos simples que ayuden al diseñador a definir los valores de dichas matrices, las cuales están en función del sistema, del control que se desee realizar y de los esfuerzos de las variables de control; siendo fundamental el conocimiento profundo del proceso por parte del ingeniero. Los enfoques clásicos como el ensayo y error, el método de Bryson, y la asignación de polos consumen mucho tiempo y no garantizan el rendimiento esperado. Esta investigación planteó una metodología basada en algoritmos genéticos y optimización por enjambre de partículas para definir las matrices de peso Q y R. Logrando diseñar controladores óptimos de forma sencilla, rápida y a partir de un conocimiento básico del sistema a controlar.

**Palabras Clave:** Regulador lineal cuadrático, matrices de peso Q y R, algoritmos genéticos, optimización por enjambre de partículas.

## GENETIC ALGORITHMS AND PARTICLE SWITCHING OPTIMIZATION TO DEFINE THE MATRICES OF WEIGHT OF THE LINEAR QUADRATIC REGULATOR METHODOLOGY

**Abstract:** The linear quadratic regulation problem, its modern control strategy where controller parameters are found that minimize unwanted deviations through the configuration of the weight matrices Q and R; taking care of the tedious work done by the specialist in the optimization of the controller. However, there are no simple analytical methods that help the designer to define the values of these matrices, which are a function of the system, the control that is desired and the efforts of the control variables; being fundamental knowledge of the process on the part of the engineer. Classic approaches such as trial and error, Bryson's method, and pole allocation are labor intensive, time-consuming and do not guarantee the expected performance. This research proposed a methodology based on genetic algorithms and optimization by particle swarm to define the weight matrices Q and R. Achieving optimal controllers design easily, fast and with only knowing basically the system to control

**Keywords:** Quadratic linear regulator, Q and R matrices, genetic algorithms, particle swarm optimization.

## I.INTRODUCCIÓN

La definición de las matrices Q y R para resolver el problema de regulación lineal cuadrático (LQR), representan un gran inconveniente en tiempo como en diseño del controlador [1]. Investigaciones desarrolladas a mediados de los 90 en adelante han estudiado los algoritmos genéticos y la optimización por enjambre de partículas como estrategia para resolver problemas de control óptimo, obteniendo buenos resultados [2], [3].

Basándose en el algoritmo genético y el algoritmo de optimización por enjambre de partículas; el objetivo central de este trabajo es desarrollar una metodología que permitirá definir las matrices de peso Q y R del regulador lineal cuadrático (LQR) con acción integral, empleado en sistemas multivariable lineales e invariantes en el tiempo, permitiendo ejecutar de forma más sencilla y rápida dicho control garantizando el rendimiento esperado. El diseño del controlador se hará en tiempo continuo usando Simulink de Matlab<sup>®</sup>.

Inicialmente se define la configuración de las matrices de peso Q y R, seguidamente se presentan varios modelos de sistemas multivariable (MIMO) lineales e invariantes en el tiempo (LTI) tomados de estudios previos para ser usados en la prueba de la metodología desarrollada. Posteriormente se exponen los pasos a seguir para el desarrollo de la metodología propuesta. Finalmente se presentan los resultados; que para efectos de validación de la metodología desarrollada (algoritmo desarrollado (Alg. Des., será la abreviación empleada en esta investigación)), se compararán con los obtenidos para el algoritmo genético, el algoritmo de optimización por enjambre de partículas y el método tradicional más empleado para determinar las matrices de peso Q y R del LQR; el ensayo y error (EE), programados cada uno de modo independiente. El análisis se hará en base a: La convergencia de la función de adaptación [3]. Índice de desempeño del LQR [2], [4], [5]. Respuesta dinámica de los sistemas a lazo cerrado [7] - [8]

## II.DESARROLLO

### A.Definición de las matrices Q y R del LQR.

Las matrices de peso Q de ( $n \times n$ ) que penaliza los estados y R de ( $m \times m$ ) que penaliza las señales de control (con  $n$  el número de estados (orden del sistema) y  $m$  el número de entradas (señales de control)) definen el LQR. Se configuran en diagonal y ambas deben ser simétricas; con Q semidefinida positiva ( $Q \geq 0$ ), y R definida positiva ( $R > 0$ ) [1] - [4].

### B. Algoritmos genéticos y algoritmos de optimización por enjambre de partículas.

Los algoritmos genéticos (GA, por sus siglas en inglés) se basan en la teoría de Darwin sobre la evolución de las especies mientras los algoritmos de optimización por enjambre de partículas (PSO, por sus siglas en inglés), desarrollado por Kennedy y Eberhart en 1995, se basan en la capacidad de adaptación de los individuos dentro del cúmulo y del cúmulo como tal [2] - [4].

GA se esfuerza por determinar la solución óptima de un problema mediante la utilización de tres operadores (que lo hacen un algoritmo genético): Selección / Cruce / Mutación; este paso es cíclico, se repite hasta que se cumpla un criterio de parada. No necesitan conocimientos específicos sobre el problema que intentan resolver pero usan heurística para la resolución de problemas, lo cual limita drásticamente el número de datos a utilizar [2] - [4].

PSO analiza las interrelaciones de los individuos con los integrantes de los grupos; como se afectó con los otros y con él mismo, por lo tanto presenta dinámica de grupo o conducta social; basado en la población igual que GA y comportamiento individual, a diferencia del GA [3], [4]. Cada individuo puede modificar su comportamiento basado en tres (3) factores: Conocimiento sobre el entorno, conocimiento histórico y experiencia de los individuos cercanos. Después de varias iteraciones (avances) el cúmulo de partículas tiende a ir a la posición del individuo mejor ubicado [3]. En PSO se busca que todos los pobladores del sistema alcancen un óptimo global.

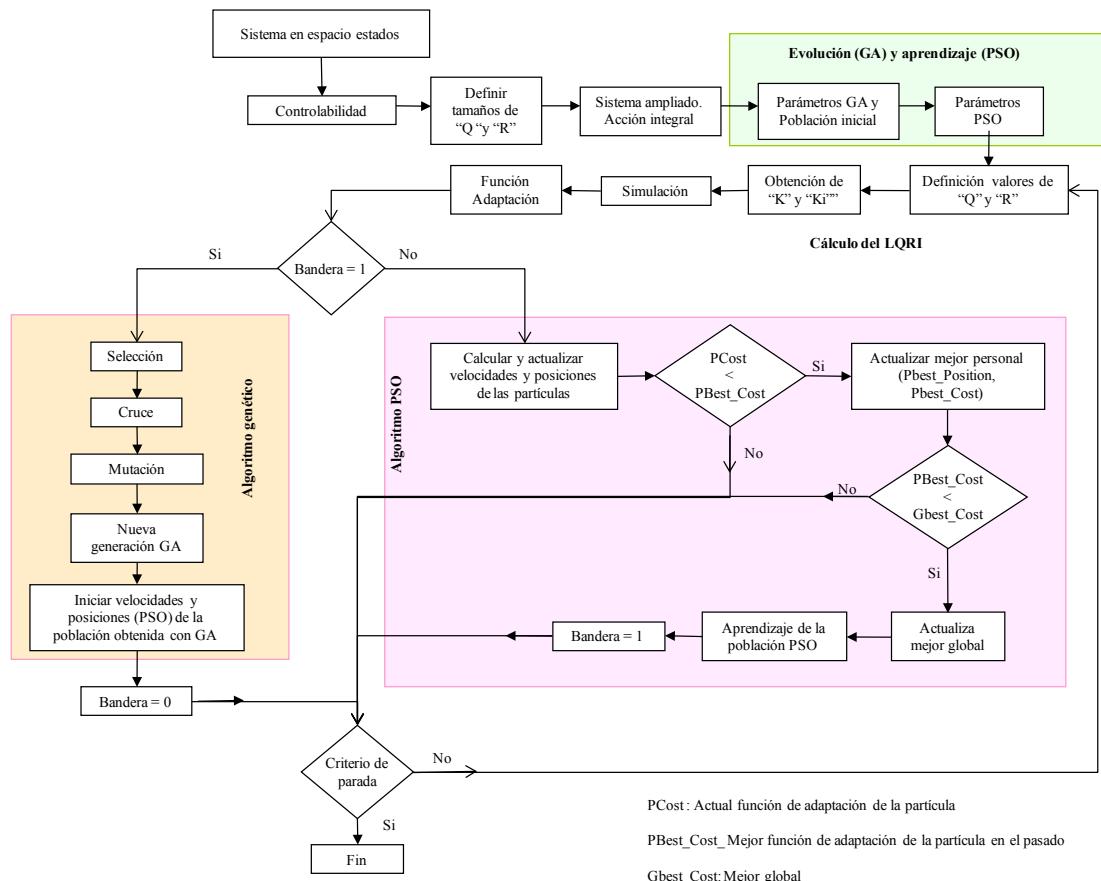
C. Modelos MIMOS de sistemas LTI empleados en la investigación.

Los sistemas MIMO LTI empleados fueron: Sistema 1: Electro mecanismo multivariable [9]. Sistema 2: Evaporador de circulación forzada [10]. Sistema 3: Helicóptero militar CH-47B [11].

## B.METODOLOGÍA

### A. Diseño de la metodología.

El código inicia con el algoritmo genético, al obtener la primera generación esta se mejoró empleando optimización por enjambre de partículas. La Figura 1 muestra el diagrama de flujo de la metodología diseñada para la obtención de las matrices de peso Q y R del LQR.



**Figura 1. Diagrama de flujo de la metodología diseñada para obtener las matrices de peso Q y R del LQR, a partir de los principios del GA y el PSO.**

Siguiendo los pasos descritos a continuación:

- 1.Población inicial. Definir parámetros del GA y los límites inferior y superior de los parámetros del PSO
- 2.Definir Q y R
- 3.Obtener el valor de las ganancias de control proporcional (K) e integral (Ki) usando el comando lqr en el software Matlab©
- 4.Evaluación de la función de adaptación
- 5.Inicializar velocidades y posiciones de las partículas (PSO) de la población (obtenida con GA).
  - a.Bandera 1: Operadores genéticos: selección, cruce, mutación.
  - b.Bandera 0: Si el costo para la mejor solución local es menor que el costo de la mejor solución global, la solución global se reemplaza con la solución local. Cal-

cular velocidades y posiciones. Actualizar peso de las partículas. En cada etapa, el programa guarda el valor de costo y valor de error mínimo y se modifica la posición de cada partícula.

6.Evaluar criterio de parada. No se cumple, volver al paso 2.

El criterio de parada se basó en la premisa de que ambas partes del algoritmo resultante de la metodología desarrollada (evolución (GA) y aprendizaje (PSO)) alcanzaran el mismo valor de error mínimo; para esto se verificó que la diferencia entre las soluciones obtenidas fuera cero (0) y que dicho valor se repitiera tres (3) iteraciones seguidas. La Tabla I, presenta los datos usados en la codificación del algoritmo resultante de la metodología desarrollada.

**TABLA I.** Parámetros empleados para el algoritmo desarrollado. A partir de los operadores genéticos del GA [3] y criterios de aprendizaje para mejorar la ubicación tomados de PSO [2], [12].

Parámetro	Datos
<b>Población inicial</b>	50
<b>Función de adaptación (FA)</b>	ITAE
<b>Restriciones</b>	No aplica
<b>Selección</b>	Torneo
<b>Cruce</b>	Simple (en un punto)
<b>Probabilidad de cruce (pr)</b>	90%
<b>Mutación</b>	Multigen
<b>Probabilidad de mutación (pm)</b>	0.05
<b>C<sub>1</sub></b>	2.05
<b>C<sub>2</sub></b>	2.05
<b>Límite mínimo de variable decisión, VarMin</b>	1e-5
<b>Límite máximo de variable decisión, VarMaxn</b>	10

#### B. Desarrollo y aplicación de la metodología.

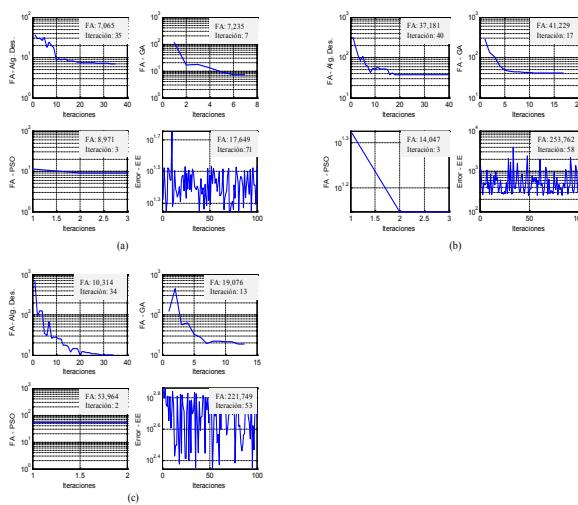
Haciendo uso de la herramienta Matlab<sup>©</sup> se llevó a cabo la programación la metodología propuesta en esta investigación y el diseño del controlador se realizó en tiempo continuo usando Simulink de Matlab<sup>©</sup>. El tiempo de simulación empleado fue de cien segundos ( $t_s=100$  s). Realizándose ajustes al valor de referencia a lo largo de la simulación. Se empleó el escalón unitario como señal de entrada [8].

## IV. RESULTADOS

### A. Convergencia de la función de adaptación (FA).

En la Figura 2 pueden apreciarse los resultados obtenidos en la convergencia de la función de adaptación, el número máximo de iteraciones ejecutadas y el error mínimo requerido, tanto de la metodología desarollada

(Alg. Des.) como de los métodos: GA, PSO, EE para: sistema 1, ver Fig. 2 (a); sistema 2, ver Fig. 2 (b); sistema 3, ver Fig. 2 (c), respectivamente. Observando que aunque el número de iteraciones presentada por el Alg. Des., respecto al GA y PSO fue mayor, este siempre logró converger a la mejor función de adaptación para todos los sistemas, ver Fig. 2(a), Fig. 2(b) y Fig. 2(c) lo cual, como se verá más adelante cuando se presenten las respuestas dinámicas de los sistemas, permitió ejercer el mejor control, debido a que valores demasiado altos de FA pueden ocasionar que el algoritmo oscile alrededor de un mínimo y una convergencia muy rápida no garantiza que se haya dado con la solución más óptima; quedando en un óptimo local. Cabe destacar que el método EE no posee criterio de parada por lo que se estableció un número finito de cien (100) iteraciones, luego de las cuales se elegía la iteración con el menor FA.



**Figura 2. Gráficas de Convergencia de FA vs Iteraciones: (a) Sistema 1, (b) Sistema 2, (c) Sistema 3.**

## B. Definición de las matrices de peso Q y R. Entonamiento del controlador LQR.

Con el algoritmo desarrollado se logró obtener los parámetros de Q y R del LQR, los elementos del vector de ganancia proporcional (K) y los elementos del vector de ganancia integral (Ki) para cada sistema como se pueden apreciar a continuación:

Sistema 1:

$$Q_{SIST1} = \begin{bmatrix} 0,0947 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0852 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1799 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0634 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9296 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,8105 \end{bmatrix} \quad R_{SIST1} = \begin{bmatrix} 0,8370 & 0 \\ 0 & 0,2910 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$K_{SIST1} = \begin{bmatrix} 1,62 & 0,2496 & -0,1845 & 0,0841 \\ 0,0611 & 0,1363 & 1,6947 & 0,5417 \end{bmatrix} \quad K_{iSIST1} = \begin{bmatrix} 1,0481 & -0,1024 \\ 0,1860 & 1,6599 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Sistema 2:

$$Q_{SIST2} = \begin{bmatrix} 0,1360 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1277 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8848 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9475 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9656 \end{bmatrix} \quad R_{SIST2} = \begin{bmatrix} 0,1736 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9842 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0225 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$K_{SIST2} = \begin{bmatrix} -1,5296 & -5,5250 & 0,5623 \\ -2,0761 & 1,1059 & -1,0667 \\ 2,2353 & -1,9096 & -32,0206 \end{bmatrix} \quad K_{iSIST2} = \begin{bmatrix} -0,9655 & -2,1014 & 0,2143 \\ -0,8566 & 0,4140 & -0,0740 \\ 0,1810 & -0,7404 & -6,5089 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Sistema 3:

$$Q_{SIST3} = \begin{bmatrix} 0,0153 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5715 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4843 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,999 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9319 \end{bmatrix} \quad R_{SIST3} = \begin{bmatrix} 0,6996 & 0 \\ 0 & 0,6617 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$K_{SIST3} = \begin{bmatrix} -0,0056 & 0,0382 & 13,2978 & 52,1369 \\ 0,0169 & -0,3760 & -0,2478 & 0,0495 \end{bmatrix} \quad K_{iSIST3} = \begin{bmatrix} -0,0691 & 1,1522 \\ -1,2267 & -0,0686 \end{bmatrix} \quad (6)$$

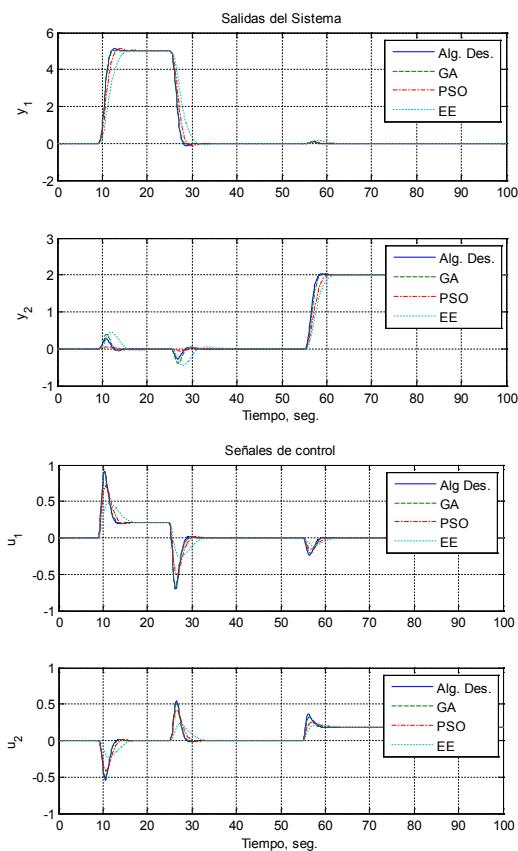
## C. Respuesta dinámica de los sistemas a lazo cerrado.

Es importante notar que el controlador multivariable LQR no pierde control sobre la planta. Para sistemas MIMO donde la iteración de las variables influye en el desempeño del proceso también se espera que el controlador actúe más rápido ya que poco esfuerzo de control se refleja en una respuesta más lenta y por ende mayor

tiempo de levante y estabilización. “Suavizar” la señal de control, es decir, amortiguar el sobrepico debido al cambio de la señal de referencia (señal escalón) es una característica deseable en la práctica, puesto que aumenta la vida útil del actuador en la planta.

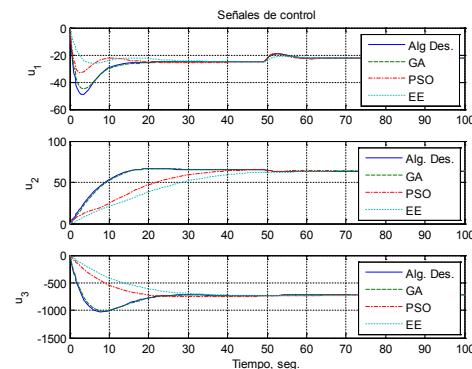
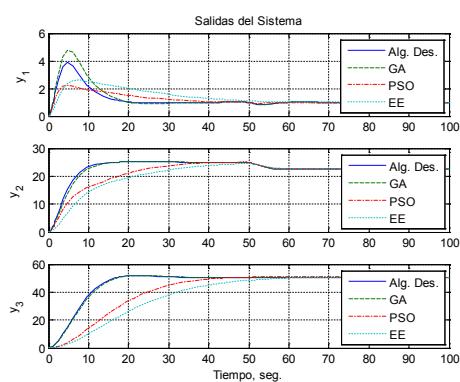
Los ajustes realizados al valor de referencia para el sistema 1, a lo largo de la simulación fueron: y1=5 a los 10s y y2=2 a los 56s, ver Figura 3. A pesar de la in-

teracción existente en el accionamiento, el controlador logra que cada salida alcance a su respectiva referencia. El algoritmo desarrollado presentó la mejor respuesta.



**Figura 3. Respuesta dinámica comparativa a lazo cerrado del sistema 1.**

En el sistema 2, Los valores de referencia fueron  $y_1=1$ ,  $y_2=25$  variando a 22,5 a los 50s y para  $y_3=50$ . las variables que presentan mayor interacción entre sí son nivel ( $y_1$ ) y composición ( $y_2$ ). Para la salida más importante del segundo sistema estudiado ( $y_2$ ) el algoritmo desarrollado presentó el menor sobreceso (0,19%) y se estableció a los 38,81s, como puede apreciarse en la Figura 4.

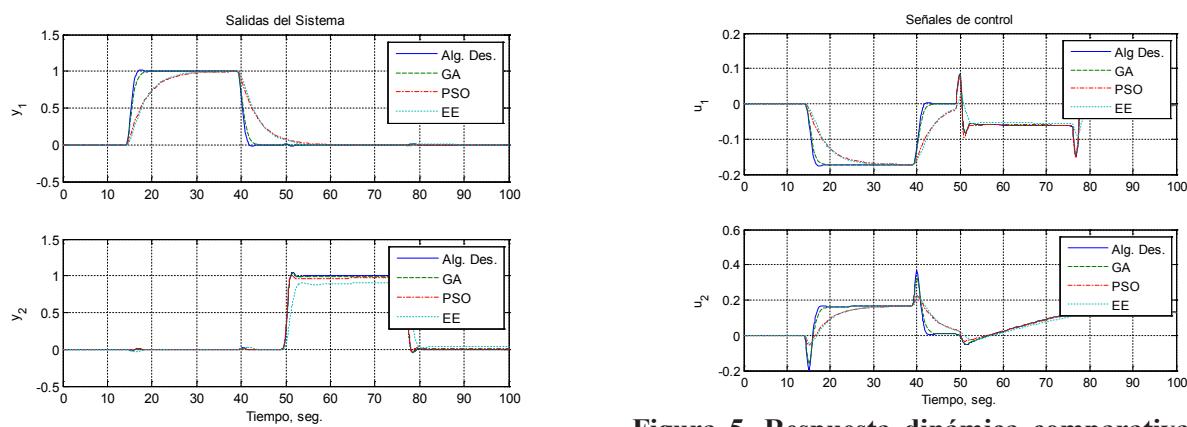


**Figura 4. Respuesta dinámica comparativa a lazo cerrado del sistema 2.**

Los ajustes del valor de referencia a lo largo de la simulación para el sistema 3 fueron  $y_1=1$  ( $t=15s$ )  $y_2=1$  ( $t=50s$ ), ver Figura 5, la respuesta de la primera salida ( $y_1$ ), el Alg. Des., tuvo un tiempo de levante de 1,86s con un sobreceso de 0,016%. No se presentó sobreceso de la salida para el resto de los algoritmos. En la segunda salida se aprecia que Alg. Des., genera la mejor respuesta, con un tiempo de levantamiento de 1,09s y 1,11s respectivamente estableciéndose en 3,5s. Por otra parte los métodos PSO y EE, no lograron alcanzar la referencia para la segunda salida del sistema.

#### D. Índice de desempeño (JLQR).

En la Tabla III se puede observar la ponderación que da cada método a los estados (beneficio del error,  $xTQx$ ) y al costo de control ( $uTRu$ ) y la relación error/costo que alcanzó minimizar más al índice de desempeño (JLQR). Entre Q y R y la función que cada uno ejerció dentro del índice de desempeño JLQR se encontró una solución de compromiso entre el rendimiento del controlador y su nivel de actuación. R pondera el valor de la secuencia de señal de actuación, es decir, evita que los valores de la señal de control sean muy grandes. Por lo tanto al minimizar JLQR se consiguió una ley de control que por una parte acercó el estado al origen lo más rápido posible pero manteniendo un nivel de actuación moderados.



**Figura 5.** Respuesta dinámica comparativa a lazo cerrado del sistema 3.

**TABLA IV.** Índice de desempeño (JLQR) y términos que lo componen. Sistema 1, 2, 3.

	SISTEMA 1				SISTEMA 2				SISTEMA 3			
Alg. Des.	GA	PSO	EE	Alg. Des.	GA	PSO	EE	Alg. Des.	GA	PSO	EE	
Error ( $x^T Q x$ )	936,2	1,60E+03	1,70E+03	504,7	2,50E+06	5,50E+05	6,90E+05	3,20E+06	13,5	65	544	33,5
Costo ( $u^T R u$ )	32,9	43,4	48,5	71,8	4,70E+04	1,20E+05	7,10E+07	2,90E+08	2,5	2,7	2,5	1,8
JLQR	969,1	1,60E+03	1,80E+03	576,5	4,70E+04	1,20E+05	7,10E+07	2,90E+08	16	67,8	546,5	35,3

## V.CONCLUSIONES

1-Se diseñó un método para establecer los valores de peso de las matrices Q y R de la estrategia de control óptimo LQR en sistemas LTI implementándose con una herramienta informática Matlab© y Simulink.

2-El criterio de convergencia empleado en el algoritmo desarrollado ayudó a que el proceso de simulación, efectuado con una herramienta informática (Matlab©), fuera simple y amigable en términos de tiempo ya que no fue necesario realizar un número elevado de simulaciones, lo que representaba un inconveniente a la hora de diseñar el control LQR.

3-El esquema de control avanzado LQR con acción integral, se entonó en base a las matrices Q y R, a partir del algoritmo resultante de la metodología desarrollada; permitiendo al diseñador balancear el compromiso entre respuestas rápidas y el esfuerzo de control requerido; en tales condiciones se alcanzó el rendimiento óptimo del sistema.

4-Empleando herramientas de diseño de Matlab©, se han ajustado los parámetros del controlador a partir de una combinación de evolución y aptitud con simulaciones iterativas, obteniendo una respuesta suficientemente precisa y poco costosa computacionalmente.

5-Los resultados demostraron que cuando el método desarrollado por esta investigación se utiliza para definir las matrices de peso del LQR, la respuesta dinámica óptima se puede lograr.

6-La combinación propuesta de GA y PSO para entonar LQR da una respuesta satisfactoria de tiempo de levantamiento, sobreceso, tiempo de alojamiento y menor ITAE. Los resultados obtenidos marcan una importante mejora al aplicar el control multivariable, ya que existe un potencial beneficio económico asociado al control.

7-La investigación provee un método genérico que permite definir las matrices de peso Q y R del LQR de manera eficiente y eficaz sin importar que tanto conocimiento se tenga del sistema, puede ser aplicado en el control óptimo de diferentes procesos reales, al tiempo que asienta bases teóricas para seguir innovando en el campo del control óptimo a nivel de Hispanoamérica; actualmente muy pujante.

## RECONOCIMIENTO

Escuela de Ingeniería Eléctrica de la Facultad de Ingeniería de La Universidad del Zulia, Venezuela.

Profesores Edgar Salas, José Canelón, Ernesto Corneiles por sus oportunas asesorías en el desarrollo de la investigación

Ingeniero José Núñez por su invaluable ayuda.

## REFERENCIAS

- [1]W. J., Arcos, A., Tovar. "Control óptimo LQR de un exoesqueleto de marcha". Intekhnika, vol. 7, no. 2, pp.

- 119-132, Julio 2012.
- [2]S. A. Ghoreishi y M.-A. Nekoui. "Optimal weighting matrices design for LQR controller based on genetic algorithm and PSO". AMR, vol. 443, no. 440, pp. 7546 – 7553, Enero 2012.
- [3]S. Mobayen, A. Rabiei, M. Moradi y B. Mohammady. "Linear quadratic optimal control system design using particle swarm optimization algorithm". Int. J. Phys. Sci., vol. 6, no. 30, pp. 6958 – 6966, Noviembre 2011.
- [4]H. González. "Modelado, simulación y control de un sistema de generación eólico". M.S. Tesis, UDES, Bucaramanga, SAN, Colombia, 2008.
- [5] A. I. Abdulla, J. M. Ahmed y S. M. Attya. "Genetic algorithm (GA) based optimal feedback control weighting matrices computation." Al-Rafidain Engineering, vol. 21, no. 5, pp. 25- 33, Octubre 2013.
- [6]D. E. Kirk (2004). Optimal control theory. An introduction. New York: Dover Publication, Inc, 2004.
- [7]K. Ogata. Ingeniería de Control Moderna. 4ta ed., Minnesota: Pearson Prentice Hall, 2007.
- [8]B. Kuo. Sistemas de Control Automático. 7ma ed., México: Prentice Hall Hispanoamericana, 1996.
- [9]H. Bory P., F. Chang M., y J. E. Santos T. "Diseño y evaluación de un controlador de posición óptimo para electro mecanismo multivariable". Ciencias Holguín, vol. 22, no. 1, pp. 1-14, Enero 2016.
- [10]G. R Lanza S. (2013, Agosto) Control Multivariante para un evaporador de circulación forzada mediante realimentación del vector de estado. [online]. Available: <http://mriuc.bc.uc.edu.ve/handle/123456789/1843>
- [11]L. B. P. Nascimento, V. P. Pinto, M. A. B. Amora, y D. A. Souza. "Aplicação do algoritmo de busca harmônica no projeto de um regulador linear quadrático com ação integral" in XII Simposio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI), Natal, RN, 2015, pp. 1454 – 1459.
- [12]S. Changhao y H Duan. "Pendulum-like oscillation controller for micro aerial vehicle with ducted fan based on LQR and PSO". Science China Technological Sciences, vol.56, no.2, pp. 423–429, Febrero 2013.