

## SIMULACIÓN DE UNA TRASFORMACIÓN DE UN SISTEMA ASIMÉTRICO TRIFÁSICO A UN SISTEMA ROTORICO DE DOS EJES

Franyelit Suárez<sup>1</sup>, Danny Ramírez<sup>2</sup>, Sucre Cando Pacheco<sup>3</sup>, Juan Segura<sup>4</sup>, Gustavo Almeida<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Pontificia Universidad Católica del Ecuador, Sede Esmeraldas.

<sup>2</sup>Corporación Nacional de Telecomunicaciones, CNT. Guayaquil, Ecuador

<sup>3</sup>Universidad de Guayaquil, Facultad de Ing. Química, Ecuador.

<sup>4</sup>Universidad Tecnológica Indoamérica, Sede Quito, Ecuador

E-mail: Franyelit.suarez@pucese.edu.ec, danny\_rch@hotmail.com, sucre.candop@ug.edu.ec, juansegura@uti.edu.ec, gustavoalmeida@uti.edu.ec

---

**Resumen:** Este artículo presenta la simulación, utilizando una herramienta computacional, mediante un modelo para la transformación de variables trifásicas a sistemas de referencia qd0 estacionarios y rotacionales, con el uso de simulaciones computacionales. Este modelo se basa en las transformaciones clásicas de Clarke y Park de la transformación de las corrientes de un sistema asimétrico trifásico a un sistema de dos ejes estacionario y de este último a uno rotatorio, para su estudio tanto en condiciones estables como transitorias, para la componente fundamental o un múltiplo de esta. Luego de la transformación, el comportamiento de las componentes fasoriales obtenido al aplicar las Transformaciones qd0, así como del orden del armónico presente en la variable bajo estudio. se graficarán la forma de onda de las componentes obtenidas para su análisis y discusión. El método empleado es el método de las Componentes Simétricas.

---

**Palabras Clave:** Simulación, Transformación, corrientes, simétrico, rotatorio, qd0.

## SIMULATION OF A THREE-PHASE ASYMMETRIC SYSTEM TRANSFORMATION TO A TWO-AXIS ROTORIC SYSTEM

---

**Abstract:** This article presents the simulation, using a computational tool, by means of a model for the transformation of three-phase variables to stationary and rotational reference systems, with the use of computational simulations. This model is based on Clarke and Park's classic transformations of the transformation of the currents of a three-phase asymmetric system to a stationary two-axis system and of the latter to a rotary system, for its study in both stable and transitory conditions, for the fundamental component or a multiple of this. After the transformation, the behavior of the fasorial components obtained by applying the Transformations qd0, as well as the order of the harmonic present in the variable under study. The waveform of the components obtained will be graphed for analysis and discussion. The method used is the Symmetric Components method

---

**Key words:** Simulation, Transformations, currents, simetric, rotoric, qd0.

## I. INTRODUCCIÓN

Existen métodos matemáticos analíticos que permiten simplificar el estudio de los sistemas eléctricos de potencia en el caso de que tengan un alto grado de complejidad debido a la naturaleza de los circuitos que los componen.

Imaginemos que tenemos un sistema de potencia compuesto por tres componentes variables en el tiempo, periódicas, con diferentes magnitudes y ángulos, que será sometido a una perturbación transitoria, y necesitáramos determinar el comportamiento de estas variables en el instante de la perturbación. [1]

Las ecuaciones matemáticas que generaría este sistema serían complejas, por lo que será necesario simplificar el problema de alguna manera para encontrar las soluciones que buscamos de forma menos engorrosa.

Por ejemplo: El análisis de las corrientes en los circuitos del rotor y el estator de una máquina eléctrica rotatoria en condiciones de falla.

Para este y otros casos, existen transformaciones matemáticas que buscan simplificar estos sistemas con el fin de disminuir el grado de complejidad en el análisis del fenómeno.

Un método muy popular es “El método de las componentes simétricas”, desarrollado por Fortescue, que permite encontrar los valores de las magnitudes de un sistema de potencia trifásico desequilibrado ó asimétrico haciendo la suposición de que el mismo está compuesto por la suma de tres sistemas simétricos. [2]

También se puede mencionar “La transformación polifásica a dos ejes” que permiten convertir un sistema de n fases, a uno de dos ejes x, y desplazados entre si un determinado ángulo mas una tercera variable 0 compuesta por el valor promedio de las tres fases de referencia inicial.

Este artículo presenta una simulación que utiliza algunas de estas transformaciones para mostrar el comportamientos de las variables de un sistema de 3 fases referenciadas a uno de dos ejes para su estudio y discusión.

## II. DESARROLLO.

Como método de trabajo, se emplearán dos transformaciones trifásicas. La primera transformación será una combinación de “El método de las componentes simétricas” donde se convertirá un sistema asimétrico en la suma de tres componentes simétricas y “El método de la transformación polifásica” donde se convertirá el sistema simétrico trifásico obtenido a un sistema de dos ejes estacionario (qd) más una tercera componente (0) y luego se aplicara una segunda transformación que convertirá el sistema de dos ejes estacionario (qd0s) en uno de dos ejes rotatorio (qd0r). [3]

## MÉTODO DE LAS COMPONENTES SIMÉTRICAS.

El método de las componentes simétricas consiste en suponer que todo circuito trifásico asimétrico puede ser expresado por medio de la suma o composición de tres sistemas simétricos.

Su expresión fundamental es :

$$[F_{012}] = [T_{012}][f_{abc}] \quad (1)$$

que sirve para desacoplar las variables de abc y convertirla en componentes simétricas, siendo: [4]

$$[T_{012}] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \quad (2)$$

Al término de la ec.2 se le denomina Matriz de transferencia.

$$a = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3)$$

Al termino de la ec.3 se le denomina vector operador de giro que significa que el vector a tiene magnitud unidad y esta orientado 120° en dirección positiva desde el eje de referencia.

La ec.1 significa que las componentes simétricas F012 pueden obtenerse a partir de los valores normales fabc a través de la matriz de transferencia .

## TRANSFORMACIÓN DE SISTEMA DE n-fases A sistema ortogonal de dos fases.

Otra transformación utilizada para simplificar las complejas ecuaciones que se obtienen al analizar un sistema polifásico es la de convertir este en un sistema de solo dos fases ( ó ejes x y).

La ecuación general es:

$$[f_{xy}] = [T(\theta)][f_{123...n}] \quad (4)$$

Donde:

$$[T(\theta)] = \frac{\sqrt{2}}{n} \begin{bmatrix} \cos\frac{p}{2}\theta & \cos(\frac{p}{2}\theta - \alpha) & \cos(\frac{p}{2}\theta - (n-1)\alpha) \\ \sin\frac{p}{2}\theta & \sin(\frac{p}{2}\theta - \alpha) & \sin(\frac{p}{2}\theta - (n-1)\alpha) \end{bmatrix} \quad (5)$$

Y es el ángulo eléctrico entre los campos magnéticos de los enrollados adyacentes de las n-fases.

**TRANSFORMACIÓN (qd0).**

Una particularidad de esta última transformación es la transformación qd0 cuya idea principal es convertir los valores de unas variables dependientes del tiempo a unas variables ubicadas sobre dos ejes de un nuevo sistema de referencia (qd) mas una tercera variable (0) que será el promedio de los tres valores. Los ejes qd serán ortogonales y nuestro sistema de referencia podrá ser giratorio o fijo.

La ecuación que lo define es:

$$[f_{qd0}] = [K_s] [f_{abc}] \quad (6)$$

Donde:

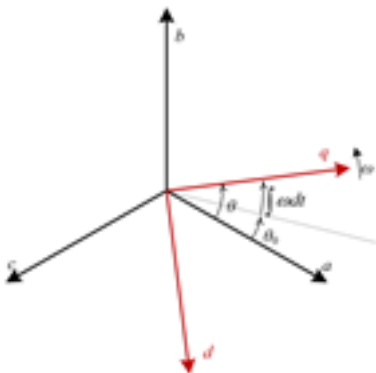
$$K_s = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \sin(\theta) & \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Siendo  $\theta$  el ángulo de giro del nuevo sistema de referencia qd0 el cual puede expresarse en función de la velocidad angular  $\omega$ . [2].

Una consideración importante es que el sub índice que acompaña a los términos dependerá de si el sistema es estacionarios (s), sincrónico (e) ó rotatorio (r). [2].

De manera que cuando se habla de fxys se dice que el sistema es estacionario, o sea que  $\omega=0$ ; fxye, es sincrónico, o sea  $\omega$  es igual a la velocidad de la red eléctrica, y fxyr, que gira con el rotor, para el caso de los motores.

La figura 1 representa gráficamente este modelo: en negro se observan las componentes abc desfasadas 120° y en rojo las nuevas componentes qd siendo  $\theta$  el ángulo que se forma entre la componente a y el nuevo eje q.



**Fig.1. Representación grafica sistema qd0.**

**TRANSFORMACIÓN de un sistema (abc) a un sistema estacionario (qd0s).**

Este método parte de un sistema trifásico asimétrico, que supone que los valores de las magnitudes no son iguales para cada fase combinado con la transformación qd0.

Pongamos como ejemplo que vamos a estudiar las corrientes trifásicas de un sistema.

El primer paso será hacer el sistema “simétrico” aplicando el “Método de las componentes Simétricas” clásico desarrollado por Fortescue pero tomando en cuenta que los vectores espaciales de las corrientes

$\vec{I}_1, \vec{I}_2$  e  $\vec{I}_0$  con respecto a  $i_a, i_b, i_c$  se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \vec{I}_1 \\ \vec{I}_2 \\ \vec{I}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (8)$$

La matriz anterior sale de un análisis hecho considerando las componentes abc como vectores escritos en términos reales e imaginarios. [1].

Para facilitar el cálculo se puede asumir que la magnitud del vector de la corriente es igual al valor pico de la corriente de fase, por lo que

$\vec{I}_2 = (\vec{I}_1^*) = \frac{3}{2}(\vec{I}^*)$  de manera que la ecuación 1 se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \vec{I}_1 \\ \vec{I}_2 \\ \vec{I}_0 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (9)$$

Sabiendo que en el espacio (qd) la corriente  $\vec{I}_q$  y  $\vec{I}_d$  que por convenio el super índice s indican que nos estamos refiriendo a un sistema estacionario, escribiendo los componentes real e imaginarios en diferentes filas, y sustituyendo el operador a se puede escribir la ecuación 2 de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} I_q^s \\ I_d^s \\ I_0 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (10)$$

Pudiéndose escribir esta ecuación, utilizando los mismos términos que la ec.1 como: [4]

$$[I'_{qd0}] = [T'_{qd0}] [i_{abc}] \quad (11)$$

Siendo  $[i'_{qd0}]$  y  $[i_{abc}]$  vectores de columnas de corrientes en qd0 y de fase abc respectivamente. [3]

La matriz  $[T'_{qd0}]$  es la matriz de coeficientes que convierte las corrientes abc en corrientes del sistema estacionario qd0.

Partiendo de que las ecuaciones de las corrientes en el sistema abc son:

$$\begin{aligned} I_a &= I_m \cos(\omega_e t + \theta) \\ I_b &= I_m \cos(\omega_e t - \frac{2\pi}{3} + \theta) \\ I_c &= I_m \cos(\omega_e t - \frac{4\pi}{3} + \theta) \end{aligned} \quad (12)$$

Aplicando la transformación de la ec.10, las corrientes en el sistema qd0 serán:

$$\begin{aligned} I'_q &= I_m \cos(\omega_e t + \theta) \\ I'_d &= I_m \cos(\omega_e t + \theta + \frac{\pi}{2}) \\ I'_c &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Se puede observar que la componente de la corriente en el eje q es perpendicular a la componente de la corriente en el eje d, y tienen el mismo valor pico que la componente en el sistema abc. [1].

### TRANSFORMACIÓN DE UN SISTEMA ESTACIONARIO (qd0s) A UN SISTEMA ROTATORIO (qd0r)

Para ciertas aplicaciones es necesario convertir un sistema estacionario qd0s a un sistema rotatorio qd0r.

Las ecuaciones 13 muestran los resultados de las corrientes rotando a una velocidad  $\omega$ , pero supongamos que existe otro sistema de referencia arbitrario qd0 que gira a una velocidad  $\omega_r$ , por ejemplo, el rotor de un motor, y que se requiere referenciar el sistema original, el cual podemos definir como estacionario qd0s al nuevo sistema qd0r. [5]

La expresión matemática será:

$$\begin{bmatrix} I'_q \\ I'_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_q \\ I_d \end{bmatrix} \quad (14)$$

Siendo el nuevo ángulo que se forma entre el eje q, que gira a velocidad  $\omega$ , y el eje q del sistema rotatorio. [1]. O sea:

$$\theta(t) = \int_0^t \omega(t) dt + \theta(0) \quad (15)$$

### III. RESULTADOS:

Para desarrollar el programa se realizó un proyecto que parte de las ecuaciones de las corrientes de fase de un sistema trifásico abc al cual se le realizaron las transformaciones para finalmente obtener las formas de ondas de las componentes del sistema qd0. [6]

Las ecuaciones de las corrientes del sistema abc son:

$$\begin{aligned} I_a &= I e^{-\alpha} \cos(m)(2\pi t) \\ I_b &= I e^{-\alpha} \cos(m)(2\pi t - \frac{2\pi}{3}) \\ I_c &= I e^{-\alpha} \cos(m)(2\pi t + \frac{2\pi}{3}) \end{aligned}$$

Las variables que se deben introducir para inicializar la simulación son:

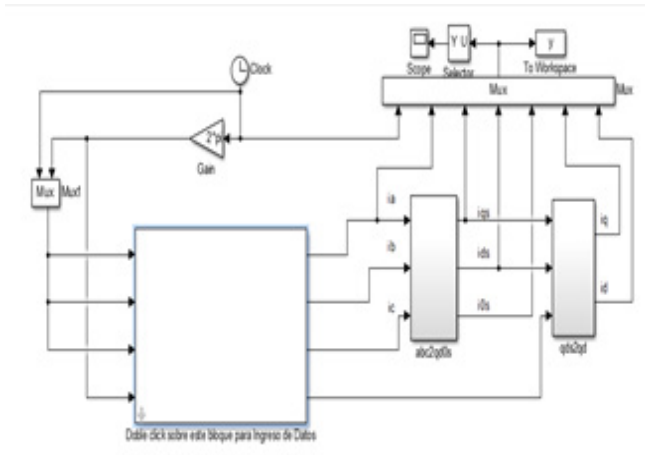
Alfa: Factor De Atenuación de la onda. Este factor permitirá simular la forma de onda en condiciones transitorias, teniendo en cuenta la atenuación de la perturbación. [7]

m: Componente de la corriente en estudio. Este factor determina el período de la onda inicial.

nframe: Múltiplo de la velocidad angular para obtener el ángulo de desplazamiento de el eje q del sistema rotatorio (qd0r) con respecto al eje q del sistema estacionario (qd0s).

Theta0.: Angulo inicial eje q en sistema estacionario (qd0s). [8]

El modelo desarrollado se presenta en la figura 2:

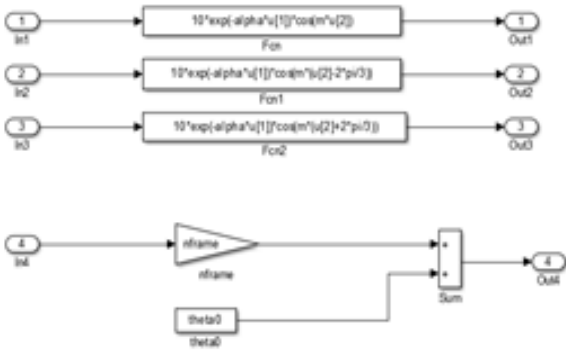


**Fig. 2. Modelo de la transformación.**

En este modelo se desarrollaron 3 bloques fundamentales.

En el bloque principal se generan las ecuaciones de las corrientes, tomando como parámetros de entrada el tiempo, obtenido del bloque clock multiplicado por el valor de la frecuencia angular  $\omega t$  en radianes ( $2\pi$ ). Ver figura 3.

Adicionalmente en este bloque se determina la diferencia de velocidad angular que habrá entre el sistema de referencia estacionario y el rotatorio, mediante las variables n-frame y theta0 en radianes.

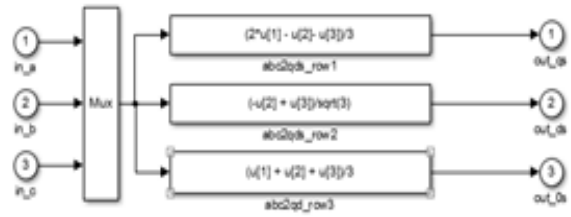


**Fig.3 Bloque principal.**

El bloque abc2qd0s es el que permite transformar las corrientes del sistema (abc) a sistema estacionario (qd0). Ver figura 4.

Como se puede ver en el mismo se aplica la ecuación 10 mostrado en la descripción teórica, multiplicando la respectiva componente abc con la matriz de transferencia

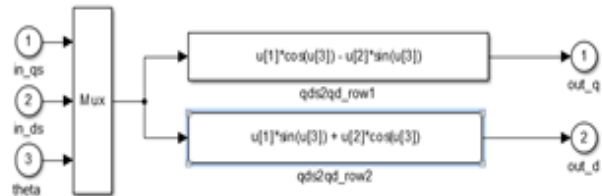
$$\begin{bmatrix} T_{qd0} \end{bmatrix} [9]$$



**Fig. 4. Bloque abc2qd0s**

Por ultimo está el bloque qds2qd el cual convierte el sistema qd0s a sistema qd0r. Ver figura 5.

En el se ejecuta la ecuación 14 tomando en cuenta que será el ángulo existente entre el eje q estacionario y el eje q rotatorio.

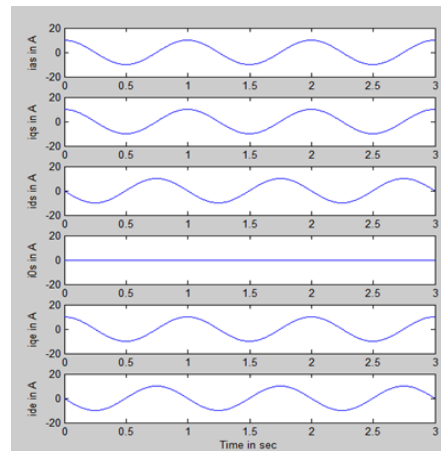


**Fig. 5. Bloque qd2qd.**

Fig. 7. Definición de parámetros de impresión en Callbacks..

**IV. DISCUSION Y ANALISIS.**

Se realizaron varias simulaciones para diferentes valores de los parámetros iniciales de entrada y graficando la componente a de la corriente de entrada, las componentes qs y ds estacionarias y sus respectivas componentes rotatorias qr, dr y 0. con l finalidad de discutir los resultados.



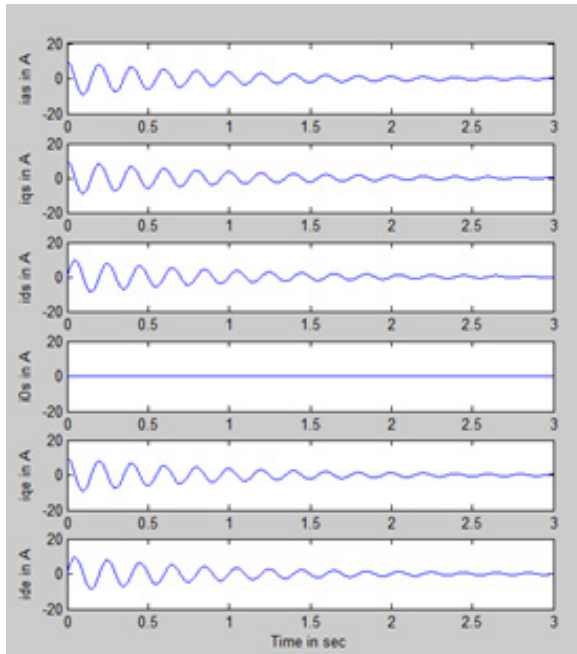
**Fig.6. Resultados para m=1, alfa=0, nframe=0, teta=0**



En La figura 6 se muestran las graficas resultantes de hacer la simulación, para un periodo de tiempo de 3 segundos, solo para la componente fundamental,  $m=1$ , en condiciones estables, ya que  $\alpha=0$ , y para un sistema rotatorio síncrono ya que no existe  $n_{frame}=0$  y  $\theta=0$ .

Se observa que las componentes  $i_q$  e  $i_d$  tanto en el plano estacionario como el rotario están desfasadas  $90^\circ$  y que su comportamiento es estable a lo largo de la simulación.

Si quisiéramos simular un proceso transitorio, solo deberíamos darle un valor a  $\alpha$  que será la constante de atenuación de la onda, y si además aumentáramos el valor de  $m$ , cambiaríamos el período de la onda de corriente fundamental.



**Fig.7. Resultados para  $m=5$ ,  $\alpha=1$ ,  $n_{frame}=0$ ,  $\theta=0$**

En la figura 7 se muestra el resultado para  $m=5$ , y  $\alpha=1$ . Se puede observar que el período de la onda aumenta, y que las componentes estacionarias y rotatorias tienen igual comportamiento ya que no existe diferencia de ángulo entre las mismas.

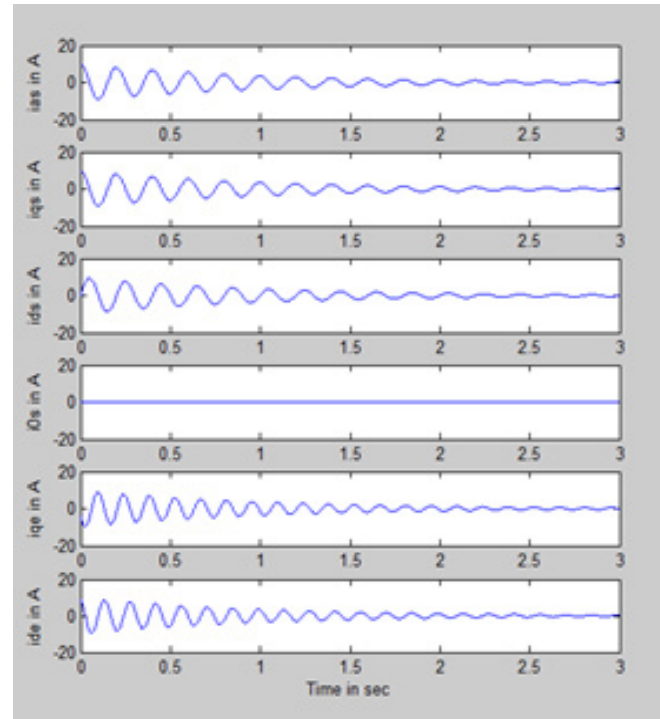
Si para el ejemplo anterior, le diéramos un valor a  $n_{frame}$  y  $\theta$ , lo que significa que el sistema de referencia rotatorio gira con un ángulo de deslizamiento con respecto al estacionario, se observaría que las ondas en el eje rotatorio cambian en cuanto a período y ángulo, lo que implica que hay fenómenos asociados a las diferentes componentes que modifican el comportamiento de la corriente en el sistema de referencia rotatorio.

En la figura 8 se puede observar este resultado.

## V. CONCLUSION.

Como se puede observar en el ejercicio realizado, es posible simular, con bastante aproximación, sistemas polifásicos reduciéndolos a sistemas de referencia de dos ejes, que según sea el caso, pueden ser estacionarios o rotatorios.

El método planteado tiene su raíz en el estudio de las máquinas eléctricas rotatorias.



**Fig.8. Resultados para  $m=5$ ,  $\alpha=1$ ,  $n_{frame}=2$ ,  $\theta=2$**

Si se hace una analogía con el ejercicio, las corrientes abc serían las corrientes de entrada al estator de la máquina, siendo el sistema  $qds$  el comportamiento de la corriente en el estator, y el sistema  $qd0r$ , el comportamiento en el rotor.

Según nuestra opinión, este modelo es muy eficaz, ya que es capaz de tener en cuenta los fenómenos asociados a las componentes que modifican el comportamiento cuando pasan de un sistema a otro.

Como dato curioso, se deja al lector la simulación para  $m=3$ , que sería para la componente de 3er orden de la corriente y corroborar los resultados con los fenómenos que ocurren en la realidad.

## VI. REFERENCIAS

[1] Bradtke, S.J. and Ydstie, B.E., "Adaptive linear quadratic control using policy iteration.," in Proceedings of the American Control Conference, Baltimore, MD,

1993.

[2]Chen, H.F. and Guo, L, *Identification and Stochastic Adaptive Control*. Cambridge, MA: Cambridge Press, 1991.

[3]David A. Wagner, Daniel L. Dvorak, Lynn E. Baroff, Matthew B. Bennett, Michel D. Ingham, David S. Mittman, Andrew H. Mishkin, "A Control Architecture for Safe Human-Robotic Interactions During Lunar Surface Operations," *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, pp. 10-22, 2009.

[4]Liou, L.W. and Ray, A., "A stochastic regulator for integrated communication and control systems Part I— Formulation of control law," in *ASME Journal of Dynamic System Measurement and Control*, vol. 4, 1991, pp. 688–694.

[5]A. Mansouri and F. Krim, "Genetic algorithms based parameters identification of induction machine

armax model," in *Power Engineering and Optimization Conference (PEOCO)*, 2011, pp. 182-189.

[6]Spong, R. J. Anderson and M. W., "Bilateral Control of Teleoperators with Time Delay," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 34, no. 5, pp. 494 – 501., 1989.

[7]Tabbara, M., "A linear quadratic Gaussian framework for optimal networked control system design.," in *Proceedings of the IEEE American Control Conference*, Seattle, WA, 2008, pp. 3804-3809.

[8]Werbos, P.J., "Approximate dynamic programming for real-time control and neural modeling. In *Handbook of Intelligent Control*," in D.A. White and D.A. Sogge, (eds.). Van Nostrand Reinhold, New York, 1991.

[9]Wouw, N.V.D., Nesic, D., and Heemels, W.P.H. , "A discrete-time framework for stability analysis of nonlinear networked control systems," *Automatica*, vol. 12, no. 48, pp. 1144-1153., 2012.